Дорогие ребята!

Вы держите в руках уникальное пособие по математике, разработанное наиболее опытными преподавателями Физтех-Колледжа. Сборник подготовлен в соответствии с методикой, которая эффективно используется на занятиях по математике в Физтех-Колледже на протяжении нескольких лет.

Пособие состоит из восьми семинаров. Материалы к семинарам содержат теоретическое введение, подробный разбор наиболее существенных для понимания данной темы задач, и коллекцию задач различного уровня сложности по каждой теме для решения в классе и дома. В конце пособия содержатся ответы либо указания ко всем задачам.

Мы надеемся, что данное пособие будет отличным подспорьем в изучении математики!

Желаем вам успеха!

Коллектив кафедры математики
Физтех–Колледжа

Оглавление

Семинар 1

Алгебра
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

План занятия

- Как рисовать ответы к уравнениям и неравенствам
- Что такое система и совокупность уравнений или неравенств
- Квадратичные неравенства

Скорее всего, вы знаете, что такое неравенство. Вот примеры неравенств

$$x > 3, \quad |x| \leqslant 1, \quad x^2 + x > 0, x > x, \quad x > y, \quad x^2 > y^2.$$

Определение 1.1 *Неравенство — это два выражения, между которыми стоит один из четырёх знаков*

$$> \quad < \quad \leqslant \quad \geqslant$$

В выражения могут входить какие-нибудь буквы (например x, y, t), которые называются переменными. Если в выражении встречается только одна переменная, то это неравенство для одной переменной.

Примеры:

- $x > 1$
  Это строгое неравенство. Оно настолько простое, что уже является ответом. А вот рисунок для этого ответа:

- $x^2 < 1$
  Это неравенство равносильно неравенству $|x| < 1$. То есть подходят все x, которые меньше 1 и больше -1. Это можно записать как

  $$x < 1 \text{ и } x > -1$$

  Можно написать целый ряд равносильных утверждений

  $$x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$$

  Значёк $\in$ обозначает глагол “принадлежит множеству”. Значёк $\Leftrightarrow$ обозначает “равносильно” или “то же самое, что и”.

Круглые скобочки пишутся, когда крайняя точка не включается. Числа 1 и -1 не удовлетворяют нашему строгому неравенству, поэтому мы написали круглые скобки. Рисунок к этому ответу выглядит так

- $x^2 \geqslant 1$
  Здесь ответом будет
  $$x \leqslant -1 \text{ или } x \geqslant 1.$$

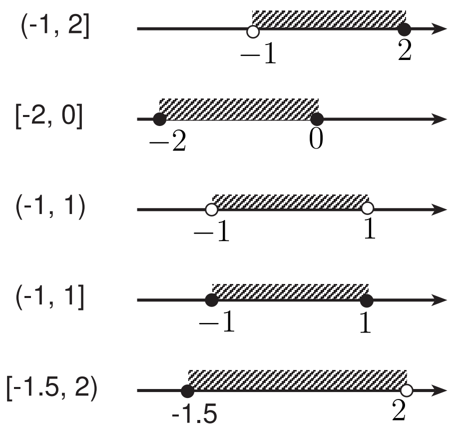
$$x^2 \geqslant 1 \;\Leftrightarrow\; |x| \geqslant 1 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x \leqslant -11 \\ x \geqslant 1 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

Ответ в этом примере есть объединение двух полубесконечных полуинтервалов. Один интервал от $-\infty$ до -1 включая -1, другой полуинтервал от 1 до $+\infty$.

Примеры множеств, их картинки и обозначения

Как видите, довольно важным моментом является сам язык описания множеств. Ответом неравенста или системы неравенств является некоторое множество, которое и нужно поместить в ответ. Лучше всего его нарисовать. Справа показаны примеры различных интервалов.

Чтобы объединять два интервала используется галочка вверх: $\cup$. Эта галочка обозначает объединение. Запись
$$x \in [1, 2] \cup (3, 5)$$
обозначает, что x есь любое чило либо из отрезка $[1, 2]$, либо из интервала $(3, 5)$.



Операции с неравенствами

I. Неравенства можно умножать на положительные числа. Умножить неравенство на число, значит умножить на это число обе его части. Например,

$$2x > 14, \quad \Leftrightarrow \quad x > 7.$$

Здесь мы умножили первое неравенство на 1/2 и получили второе. Но всегда следует помнить, что

! При умножении обоих сторон неравенства на -1 (и вообще любое отрицательное число) знак неравенства меняется.

Действительно, посмотрите

$$2 > 1$$

— это верное неравенство. Если мы умножим его части на -1 и не сменим знак, то получим

$$-2 > -1,$$

что неверно.

II. Неравенства можно объединять в системы. Если два неравенства $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ объединены в систему

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases},$$

то это значит, что нужно найти такие x, которые подходят как первому, так и второму неравенству. Ответом системы неравенств будет пересечение ответов отдельных неравенств.

Ключевые задачи

Задача 1.1. Нарисуйте решение неравенства а) $x^2 < 4$ б) $x^2 \leqslant 4$

Решение. Квадрат числа меньше 4, когда модуль этого числа меньше двух. Поэтому ответом будет промежуток от -2 до 2. В первом случае крайние точки 2 и -2 не подходят, а в случае б) они входят в решение.

а) 

б) 

Как видите, в первом случае точки выколотые, а во втором случае закрашенные.

Задача 1.2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x - 1 < x + 3, \\ 5x - 1 > 6 - 2x, \\ x - 5 < 0 \end{cases}$

Решение. Решим каждое из неравенств по отдельности:

$$2x - 1 < x + 3, \Leftrightarrow 2x - x < 3 + 1$$

Задачи для решения в классе

$\boxed{\textbf{I}}$

Задача 1.3. Решите неравенство а) $5x - 3 > 2x - 6$, б) $3x - 7 \leqslant 1 - x$.

Задача 1.4. Решите неравенства $|x| > |x + 1|$ и $|x| < |x + 1|$.

Задача 1.5. Решите неравенств $\begin{cases} (x + 2)(x - 6) \leqslant 0 \\ x < 5 \\ |x| \geqslant 1 \end{cases}$

Задача 1.6. Решите неравенства а) $x^2 > x$, б) $x^3 > x^2$, в) $(x - 1)^2 \geqslant (x - 1)$.

Задача 1.7. Посторой те график функции $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Определите по графику значения x, при которых функция $f(x)$ принимает отрицательные значения. Какие значения принимает функция?

Задача 1.8. Решите систему неравенств $\begin{cases} x(x - 6) \leqslant 0 \\ x < 5 \\ |x - 3| \geqslant 1 \end{cases}$

Задача 1.9. Посмотрите на неравенство:

$$\frac{2x}{x-5} > 1$$

Давайте умножим его на $x-5$ и перенесем все в одну часть:

$$2x > x - 5$$

$$2x - x > -5$$

Получаем, что $x > -5$. Правильно ли это? Давайте для проверки подставим $x = 0$ Получим

$$\frac{2 \cdot 0}{0-5} > 1,$$

а значит

$$0 > 1.$$

Это, конечно неверно. Где ошибка. Какой на самом деде ответ у этого неравенства?

$$\boxed{\textbf{II}}$$

Задача 1.10. Решите неравенства а) $x^2 - x \geqslant 6$, б) $-x^2 + x \geqslant -6$, в) $|x^2 - x| \geqslant 6$.

Задача 1.11. Решите $x/(x+1) > (x+1)/x$.

Задача 1.12. Решите $-(x-1)(x-3) \geqslant 0$.

Подсказка. Нарисуйте график левой части неравенства.

Задача 1.13. Решите $|x| - x > 1$.

$$\boxed{\textbf{III}}$$

Задача 1.14. На рисунке **??** показаны графики функции $f(x)$. Решите неравенство $f(x) \geqslant 0$

Задача 1.15. Решите неравенство $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) > 0$

Задача 1.16. Решите неравенство $x(x^2+1)(x^4+1) > 0$

Задача 1.17. Докажите, что $x - |x| = 0$ равносильно $x > 0$.

Задача 1.18. Придумайте уравнение, решение которого есть интервал: $x \in (1, 3)$.

Задача 1.19. Придумайте уравнение, решение которого есть два интервала и точка: $x \in (1,2) \cup (3,4) \cup \{5\}$.

Задача 1.20. Решите совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 2 \\ x > -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant -2 \\ x \leqslant 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Семинар 2

Геометрия
ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

План занятия

- Пифагоровы штаны
- Что такое синус и косинус?
- Построение среднего геометрического
- Вычисление высоты по основанию и двум углам

Пифагровы штаны

Теорема Пифагора: *в любом прямоугольном треугольнике квадрат, построенный на гипотенузе, равен сумме квадратов, построенных на катетах.*

Благодаря этому пифагорову заклинание, теорема запечатлелась в мозгу миллионов, если не миллиардов, людей. Это — фундаментальная теорема, заучивать которую заставляют каждого школьника, и вас тоже.

Но несмотря на то, что теорема Пифагора доступна пониманию даже младших школьников, она является вдохновляющим началом проблемы Ферма, при решении которой потерпели фиаско величайшие умы в истории математики.

Пифагор с острова Самос был одной из наиболее влиятельных и тем не менее загадочных фигур в математике. Поскольку достоверных сообщений о его жизни и работе не сохранилось, его жизнь оказалась окутанной мифами и легендами, и историкам бывает трудно отделить факты от вымысла. Не подлежит сомнению, однако, что Пифагор развил идею о логике чисел и что именно ему мы обязаны первым золотым веком математики. Благодаря его гению, числа перестали использоваться только для счета и были впервые оценены по достоинству. Пифагор считал, что числа дают ему возможность открывать истины, независимые от чьего-либо мнения или предрассудка. Истины более абсолютные, чем любое предыдущее знание.

Пифагор жил в V веке до н.э., свои познания и умения в математике он приобрел, странствуя по Древнему Миру. По некоторым преданиям, Пифагор побывал в Индии, Британии и перенял многие математические методы у вавилонян и египтян. После двадцати лет странствий Пифагор собрал и усвоил все математические правила, существовавшие в цивилизованном мире, и отплыл на родину — остров Самос в Эгейском море — с намерением основать школу. Пифагор хотел, чтобы в его школе занимались изучением философии и исследованием собранных им математических правил. Он надеялся, что ему удастся найти достаточное количество свободно мыслящих учеников, которые помогут ему создать радикально новую философию. Но за время его отсутствия тиран Поликрат превратил некогда вольный Самос в нетерпимое консервативное общество.

Пифагор отправился в южную Италию, бывшую тогда частью Древней Греции, и поселился в Кротоне, где ему посчастливилось найти идеального покровителя в лице Мило, самого богатого человека в Кротоне и одного из сильнейших людей в истории. Хотя слава Пифагора как мудреца с острова Самос распространилась по всей Греции, слава Мило была еще больше. Мило был сложен, как Геркулес, и двенадцать раз завоевывал титул чемпиона Олимпийских и Пифийских игр.

Помимо занятий атлетикой Мило высоко ценил философию и математику и занимался их изучением. Он предоставил Пифагору достаточно большую часть своего дома для того, чтобы тот мог основать школу. Так самый творчески мысливший разум и самое мощное тело стали партнерами. Там Пифагор основал пифагорейское братство — группу из шестисот последователей, способных не только понять его учения, но и добавить к ним новые идеи и доказательства. Вступая в братство, каждый последователь Пифагора должен был пожертвовать в общий фонд все свое состояние. Каждый, кто покидал братство, получал сумму вдвое большую, чем первоначальное пожертвование, и в память о нем воздвигалась надгробная плита.

Хотя многие знали о намерениях Пифагора, никто за пределами братства не знал, чем именно занимаются Пифагор и его ученики. Каждый член школы приносил торжественную клятву никогда, ни под каким видом, не разглашать посторонним математические открытия братства. Даже после смерти Пифагора один из членов братства был утоплен за то, что нарушил клятву, — публично заявил об открытии нового правильного тела, додекаэдра, ограниченного двенадцатью правильными пятиугольниками. Есть множество мифов о странных ритуалах, совершавшихся членами братства.

Пифагор установил школу–этос, изменивший ход развития математики. По существу пифагорейское братство было религиозным сообществом, и одним из идолов, которым поклонялись пифагорейцы, было Число.

Теорема 2.1 *Пифагоровы штаны на все стороны равны: на рисунке 2.1 сумма площадей маленьких квадратиков равна площади большого квадрата:*

$$S_a + S_b = S_c.$$

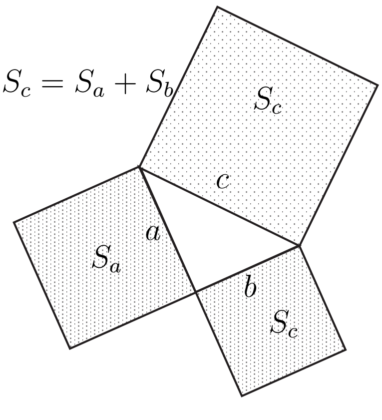


Рис. 2.1: Пифагоровы штаны.

На этом рисунке изображен прямоугольный треугольник, на сторонах которого построено три квадрата. Две маленькие стороны прямоугольного треугольника – те, которые лежат напротив острых углов, – называются катетами, а третья сторона — гипотенузой. Площадь квадрата, как мы знаем равна, квадрату длины его стороны. Поэтому равенство $S_a + S_b = S_c$ означает, что

! сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

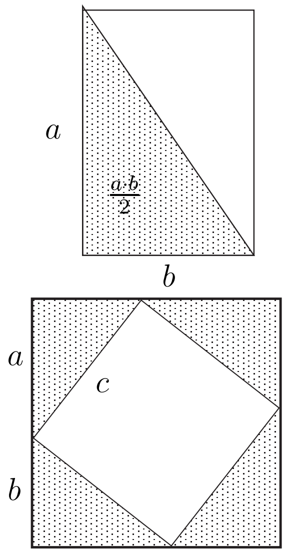


Рис. 2.2: Площадь квадрата равна сумме площадей частей.

Как Пифагор догадался до своей великой теоремы и доказал её? Во-первых, он знал формулу для площади прямоугольного треугольника:

$$S_{\triangle} = \frac{ab}{2} \tag{2.1}$$

Эта формула очевидна из рисунка справа — прямоугольный треугольник есть половинка от прямоугольника, а площадь прямоугольника $S_{\square} = a \cdot b$.

Кроме того, он понимал, что если фигура разделена на части, то её площадь равна сумме площадей этих частей. Разделив квадрат со стороной $a + b$ на четыре прямоугольника треугольника и один квадрат со стороной c, он записал

$$4 \cdot S_{\triangle} + S_{\square} = S_{\square},$$

то есть,

$$4\frac{ab}{2} + c^2 = (a + b)^2,$$

$$2ab + c^2 = a^2 + 2ab + c^2,$$

что дает нам теорему Пифагора.

Задача 2.1. Дан прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Чему равна гипотенуза и площадь этого треугольника?
РЕШЕНИЕ. Применяем теорему Пифагора. $a = 3$, $b = 4$. $c^2 = a^2+b^2 = 3^2+4^2 = 9+16 = 25$. Значит ОТВЕТ: $c = 5$, а площадь $S = \frac{ab}{2} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$. ■

Синус и косинус

Прежде чем перейти к этим страшным словам, давайте разберем почему

! зная острый угол прямоугольного треугольника и гипотенузу, можно его нарисовать.

Говоря по умному, угол и гипотенуза однозначно определяют треугольник. Действительно, зная один угол в прямоугольном треугольнике, можно вычислить другой, так как сумма всех углов в треугольника равна 180°, а сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°. Углы определяют лишь "как выглядит треугольник". Знание гипотенузы позволяет определить его размер, в частности длины двух его катетов. Если мы увеличим треугольник, сохраняя все углы, и гипотенуза увеличится в два раза, то и оба катета увеличатся в два раза. Это означает, что при фиксированном угле α катеты пропорциональны гиптотенузе. Один катет лежит напротив угла α, а второй к нему прилежит. Для первого коэффициент пропорциональности называется синусом α, а для второго — косинусом α, то есть

$$a = c \cdot \sin\alpha, \quad b = c \cdot \cos\alpha.$$

Другими словами, отношение катетов к гипотенузе зависит лишь от угла:

! отношение противолежащего катета к гипотенузе называется **синусом**, а отношение прилежащего катета к гипотенузе — **косинусом**.

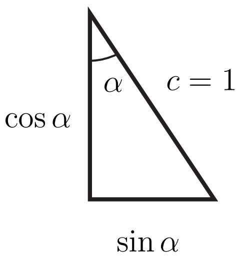
Итак, синус и косинус это функции угла равные $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$. Но в прямоугольном треугольнике $a^2+b^2=c^2$, а значит

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1$$

Поэтому верно

! Основное тригонометрическое тождество:

$$(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$$



Если у прямоугольного треугольника гипотенуза равна 1, то катеты равны $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, основное тригонометрическое тождество не более, чем теорема Пифагора для этого треугольника.

Кроме синуса и косинуса есть еще тангенс и котангенс:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \tag{2.2}$$

Если против угла α лежит катет a, то можно сразу найти второй катет b:

$$\frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha,\quad \Rightarrow b=a\operatorname{ctg}\alpha.$$

Конечно, для этого надо знать котангенс угла α.

И напоследок — полезная формула для вычисления площади треугольника. В эту формулу входит синус угла.

Теорема 2.2 *Площадь любого треугольника можно получить, взяв произведение его сторон на синус угла между ними:*

$$S_\triangle=\frac{1}{2}a\cdot b\sin C$$

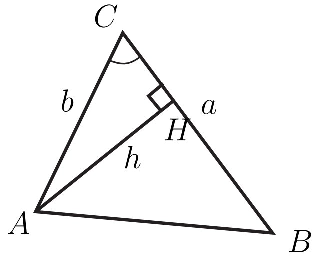
Доказательство. Формулу $S_\triangle=\frac{1}{2}ah$ мы знаем. Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник $\triangle ACH$. Для него можем записать

$$AH=AC\sin C,$$

или в буквах

$$h=b\sin C.$$

Подставляем этот h в формулу площади $S_\triangle=\frac{1}{2}a\cdot h$ и получаем то, что нужно доказать.



■

Ключевые задачи

Задача 2.2. Дан правильный треугольник со стороной a. Найдите его высоту и площадь.

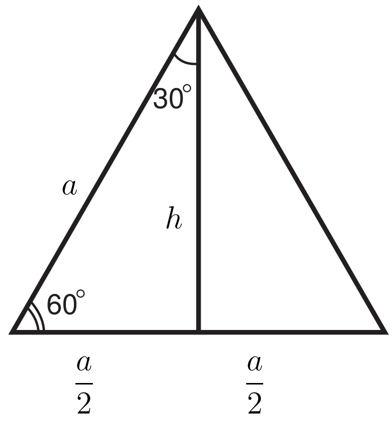


Рис. 2.3.

Решение. Высота h делит треугольник на два одинаковых прямоугольных треугольника. Гипотенузы в этих треугольниках равны a, один катет есть проведенная высота, а другой — половинка основания, то есть $a/2$. Запишем теорему Пифагора:

$$h^2 + (a/2)^2 = a^2$$

Из этой формулы получаем $h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$. А значит

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Задача 2.3. Синус некоторого острого угла равен 1/4. Чему равен косинус этого угла?
Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, получаем

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{1-1/16} = \sqrt{15/16} = \sqrt{15}/4.$$

Ответ: $\sqrt{15}/4$. ■

Задача 2.4. У прямоугольного треугольника катеты равны $a = 5$, $b = 12$. Найдите синусы и косинусы его острых углов.
Решение. Гипотенузу вычислим по теореме Пифагора. $c = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$, Катет a лежит против угла A:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{5}{13}, \quad \cos A = \frac{b}{c} = \frac{12}{13}.$$

Для угла B наоборот

$$\sin B = \frac{b}{c} = \frac{12}{13}, \quad \cos B = \frac{a}{c} = \frac{5}{13}.$$

■

Задача 2.5. Найдите sin и cos углов 30°, 45°, 60°, 90°. Постройте табличку.
Решение. В предыдущей задаче у нас получилось два прямоугольных треугольника с катетами $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\frac{1}{2}a$ и гипотенузой a. В правильном треугольнике все углы равны 60° градусов. Значит один острый угол в прямоугольных треугольниках равен 60°, а второй 30°. Получаем

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

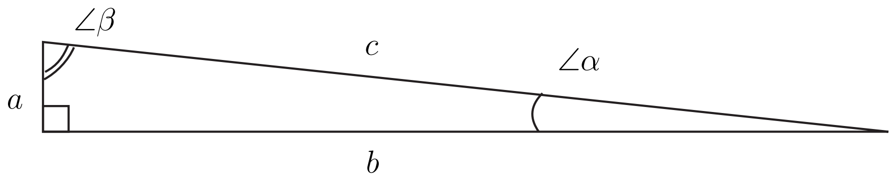
Если мы перейдем к углу 60° катеты поменяются местами. Тот, который был противоположным, станет прилежащим и наоборот:

$$\cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Для углов в 45°, 90° все просто. У прямоугольного треугольника с углом 45° второй угол тоже 45°, он равнобедренный и два его катета равны. Если они равны a, то гипотенуза равна $\sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}a$. Отношение катета к гипотенузе равно $a/\sqrt{2}a = 1/\sqrt{2}$. Поэтому

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Остались углы 0° и 90°. Чем меньше угол, тем меньше противолежащий катет. Если угол равен нулю, то и противолежащий катет равен нулю. На рисунке внизу изображен прямоугольный треугольник с очень маленьким углом α. Отношение a/c очень маленькое, а b/c близко к 1. Второй угол β близок к прямому. При $\alpha = 0$ получаем $a/c = 0$, $b/c = 1$, $\angle\beta = 90°$:



Таким образом, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, и $\cos 90° = 0$, и $\sin 90° = 1$. ■

Задача 2.6. На рисунке 2.4 углы $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $a = 1$. Найдите высоту h.

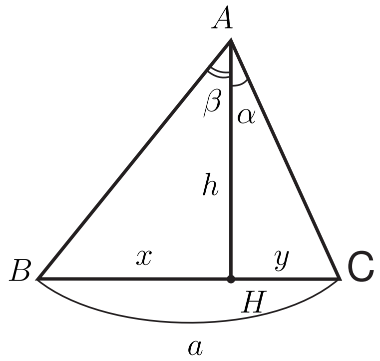


Рис. 2.4.

Решение. Угол $\beta = 45°$ а значит и второй острый угол в треугольнике $\triangle ABH$ равен 45°, то есть $\triangle ABH$ равносторонний. Значит $x = h$. Выразим теперь y через h. С одной стороны $y = AC\sin\alpha$, а с другой стороны $h = AC\cos\alpha$. Теперь давайте разделим одно уравнение на другое:

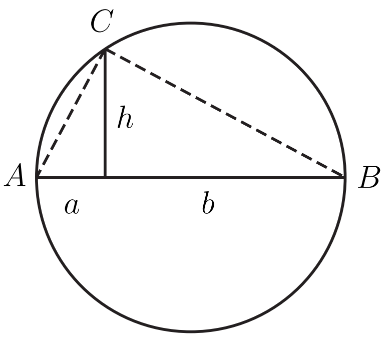
$$\frac{y}{h} = \frac{AC\sin\alpha}{AC\cos\alpha}.$$

Получается

$$\frac{y}{h} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

То есть $y = \frac{1}{\sqrt{3}}h$. Нам известно, что $x + y = 10$, значит $h + \frac{1}{\sqrt{3}}h = 10$, $h(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})h = 10$, и

Ответ: $h = \dfrac{10}{1+\sqrt{3}} = 3.660254...$



Задача 2.7. На диаметре окружности поставлена точка, которая делит его на отрезки $a = 3$ и $b = 12$. Из этой точки проведен перпендикуляр h до точки пересечения с окружностью. Найдите длину h.

Решение. Соединим точку C с концами диаметра. Получим прямоугольный треугольник разделенный на два маленьких прямоугольных треугольника. Для каждого из них можно записать теорему Пифагора:

$$a^2 + h^2 = CA^2, \quad b^2 + h^2 = CB^2,$$

$$CA^2 + CB^2 = (a+b)^2.$$

Теперь давайте творить с этими тремя уравнениями разные чудеса. Нам нужно избавиться от CA^2 и CB^2 и получить соотношение между a, b и h. Давайте просто всех их сложим:

$$a^2 + h^2 + b^2 + h^2 + CA^2 + CB^2 = CA^2 + CB^2 + (a+b)^2, \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 + 2h^2 = (a+b)^2, \quad \Rightarrow \; a^2 + b^2 + 2h^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad \Rightarrow \; h^2 = ab$$

Ответ: $h = \sqrt{ab} = \sqrt{12 \cdot 3} = 6$.
Примечание. Тот же самый ответ можно было получить, используя подобие всех трех прямоугольных треугольников.

Величина $\sqrt{ab}$ называется средним геометрическим двух чисел.

Задача 2.8. Даны два отрезка длиной a и b . На основе предыдущей задачи предложите алгоритм построения ортрезка, длина которого равна среднему геометрическому длин данных отрезков.
Решение. 1. Отложим отрезки на одной прямой друг за другом. Получим отрезок AB длины $a+b$ с точкой M внутри — граница двух отрезков. 2. Построим на отрезке AB окружность как на диаметре (для этого найдем центр AB — эта точка будет центром окружности, а радиус равен половинке отрезка). 3. Проведем перпендикуляр до пересечения с окружностью. Этот отрезок имеет длину $\sqrt{ab}$.

Задача 2.9. Известен тангенс острого угла $\operatorname{tg}\alpha = 5/12$. Найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.
Решение. Возьмем произвольный прямоугольный треугольник с таким тангенсом, например, с катетами $a = 5$, $b = 12$. Гипотенуза в этом треугольнике равна $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$. Значит синус равен $\sin\alpha = 5/13$, а косинус $\cos\alpha = 12/13$.

Задачи для решения в классе

I

Задача 2.10. У прямоугольного треугольника заданы катеты $a = 5$ и $b = 7$. Найдите гипотенузу треугольника.

Задача 2.11. У прямоугольного треугольника один катет равен 4, а синус противолежащего ему угла равен 2/3. Найдите гипотенузу и другой катет.

Задача 2.12. Известен тангенс острого угла $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

II

Задача 2.13. Стороны прямоугольника равны 4 и 7. Чему равна диагональ?

Задача 2.14. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 8, угол $\angle A = 30°$. Найдите катет, противолежащий этому углу.

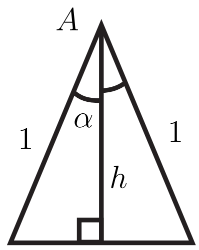
Задача 2.15. Найдите высоту равнобедренного треугольника с основанием 12 и боковой стороной 8.

Задача 2.16. Найдите сторону ромба, если его диагонали равны 6 и 8.

III

Задача 2.17. Основание равнобедренного прямоугольного треугольника равно 1. Найдите боковую сторону.

Задача 2.18. Посмотрите на рисунок. На нём изображен равнобедренный треугольник. Угол при вершине равен 2α. Докажите, что основание треугольника равно $a = 2\sin\alpha$, а высота треугольника равна $h = \cos\alpha$. На основе этого получите, что площадь равна



$$S_\triangle = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

Но с другой стороны
$$S_\triangle = \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$
(Произведение сторон AB и AC на синус угла между ними.)
Из этих двух уравнений получаем

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Проверьте эту формулу для $\alpha = 30^\circ$ и $\alpha = 45^\circ$.

Задача 2.19. Расстояние между центрами двух окружностей равно 12. Радиусы окружностей равны 8 и 10. Найдите расстояние между двумя точками пересечения этих окружностей.

Задача 2.20. Дан единичный отрезок. Как построить отрезки длиной: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{7}$?

Задача 2.21. Тройка $\{a, b, c\}$ натуральных чисел называется пифагоровой, если $c^2 = a^2 + b^2$. Например, тройка $(3, 4, 5)$ пифагорова, потому что

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Вот другие пифагоровы тройки:

$$(5, 12, 13),\ (9, 12, 15),\ (8, 15, 17).$$

Попробуйте найти другие пифагоровы тройки. Как вы думаете, можно ли найти сколь угодно много различных пифагоровых троек?

Домашнее задание

I

Задача 2.22. В прямоугольном треугольнике катет $b = 3$, а прилежащий угол $\angle A = 60^\circ$. Найдите угол $\angle B$, катет a и гипотенузу c.

Задача 2.23. Найдите высоту h_c в прямоугольном треугольнике с катетами $a = 3$, $b = 4$.

Задача 2.24. Один из катетов равен 7, а гипотенуза 11. Чему равен второй катет? Найдите примерное численное значение.

Задача 2.25. Расстояние между окружностями равно 3, радиусы окружностей равны 2. Найдите расстояние между двумя точками пересечения этих окружностей.

Задача 2.26. Высота прямоугольного треугольника опущенная из прямого угла равна 3. Угол $\angle A = 30^\circ$. Найдите катеты и гипотенузу.

Задача 2.27. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 9. В каком отношении делит высота эту гипотенузу, если один из катетов равен 6?

II

Задача 2.28. Расстояние между окружностями равно 4, радиусы окружностей равны 2 и 3. Найдите расстояние между двумя точками пересечения этих окружностей.

Задача 2.29. В теугольнике ABC высота AH равна 10, и известны углы $\angle CAH = 60^\circ$ и $\angle BAH = 45^\circ$. Найдите все стороны треугольника.

Задача 2.30. Треугольник имеет стороны 9, 12, 15. Докажите, что он прямоугольный.

Задача 2.31. Дан единичный отрезок. Как построить отрезки длиной: а) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$;

Задача 2.32. Используя задачу 2.7, докажите что среднее геометрическое двух чисел $\sqrt{ab}$ меньше либо равно среднего арифметического двух чисел $\frac{a+b}{2}$, то есть

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

при любых вещественных положительных числах a и b.

Задача 2.33. У четырех угольника две смежные стороны равны 4, а другие две смежные стороны равны 5. Найдите диагонали этого четырехугольника.

Задача 2.34. Докажите, что в прямоугольном треугольнике $h_c = \dfrac{ab}{c}$.

Примечание. Это можно доказать, используя подобие двух треугольников, на которые делит высота прямоугольный треугольник. Если вы не умеете ещё работать с подобными треугольниками, то запишите три теоремы Пифагора: для $\triangle ABC$, $\triangle CAH$ и $\triangle CBH$, затем исключите из трех уравнений две неизвестные стороны AH и BH.

III

Задача 2.35. Высота прямоугольного треугольника опущенная из прямого угла равна 3. Один из катетов равен 5. Найдите другой катет.

Задача 2.36. В прямоугольном треугольнике $\triangle ABC$ с прямым углом $\angle C$ а) $CA = 3$, $CB = 6$; б) $CA = 3$, $CB = 4$. Найдите $\sin B$, $\sin B/2$.

Подсказка. Для вычисления $\sin B/2$ впишите окружность и найдите её радиус.

Задача 2.37. Тройка $\{a, b, c\}$ натуральных чисел называется пифагоровой, если $c^2 = a^2 + b^2$. Найдите все пифагоровы тройки для $c <= 25$. Заметьте, что новые тройки можно получать умножением уже имеющихся на какое либо натуральное число. Попробуйте доказать, что существует бесконечное число пифагоровых троек с НОД$(a, b, c) = 1$.

Задача 2.38. Диаметр окружности равен 10. Из некоторой точки на окружности на диаметр опущен перпендикуляр длины 4. В каком отношении основание перпендикуляра делит диаметр?

Примечание. Надо уметь решать квадратные уравнения.

Задача 2.39. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен 1. Его периметр равен 12. Найдите стороны треугольника.

Задача 2.40. Стороны прямоугольного треугольника имеют целую длину. Гипотенуза равна 13. Найдите катеты.

Задача 2.41. Дан единичный отрезок. Как построить отрезки длиной: а) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$; б) $\sqrt{8+\sqrt{10}}$;

Задача 2.42. Известен тангенс острого угла $\operatorname{tg}\alpha$. Найдите $\sin\alpha$ (нужно получить общую формулу: в левой части $\sin\alpha$, а справа от знака равно должно стоять некоторое выражение от $\operatorname{tg}\alpha$, его и нужно найти).

Задача 2.43. Используя рисунок 2.2 на странице 10, докажите, что среднее квадратическое двух чисел больше, чем среднее арифметическое, то есть

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

при любых положительных числах a, b.

Подсказка. Удвоенное среднее квадратическое — это диагональ внутреннего квадрата, а удвоенное среднее арифметическое — это сторона большого квадрата.

Семинар 3

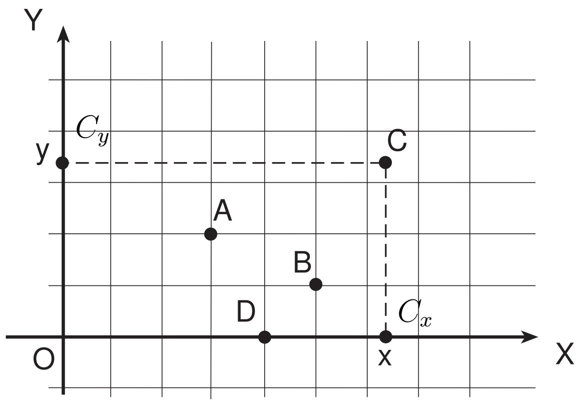
Геометрия
ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

План занятия

- Пара чисел $\rightleftarrows$ точка на плоскости
- Расстояние между точками
- Координаты центра отрезка
- Что такое уравнение фигуры?
  - прямая
  - круг
  - квадрат
- Медианы треугольника и точка их пересечения.
- Расстояние между точкой и прямой

Соединение алгебры и геометрии

То что вы видите на рисунке называется плоскостью с декартовой системой координат. Это довольно простая штука. Суть декартовой системы координат заключается в том, что каждая точка на плоскости имеет две координаты. Точка A имеет координаты $(3, 2)$, точка B — $(5, 1)$, а точка C имеет координаты (x, y). Итак, декартова система координат позволяет нам



! каждой точке точке на плоскости сопоставить два действительных числа

Декартова система координат задается началом координат, точкой O, и двумя осями координат. Это две прямые, которые пересекаются под прямым углом в точке O. Горизонтальная ось обычно называется осью X (ось абсцисс), а вертикальная — осью Y (ось ординат). Точка O делит каждую ось на две части. Одна часть называется положительной полуосью, а вторая — отрицательной полуосью.

Координаты точки C определяются по следующему алгоритму: 1) опустим два перпендикуляра из точки C на оси координат; пусть основания этих перпендикуляров есть точки C_x и C_y. 2) пара расстояний $(\pm OC_x, \pm OC_y)$ взятых с правильным знаком и будут координатами точки C. Знак выбирается в зависимости от того, на положительной (+) или на отрицательной (–) полуоси находятся основания перпендикуляров.

Зная декартовы координаты точек, мы можем легко вычислить расстояние между ними. На нашем рисунке $|OD| = 4$, $|DB| = \sqrt{2}$, $|AB| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $|OA| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Чему равны расстояния DA и OB?

Посмотрите на две важные теоремы, которые надо вам хорошо знать:

Первая теорема о том, как вычислять расстояние между двумя точками. Вы уже, наверное, сами догадались как это делать.

Теорема 3.1 *Пусть даны две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Тогда расстояние между ними вычисляется по формуле*

$$\boxed{|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{3.1}$$

Вторая теорема о том, как находится в декартовой системе координат центр отрезка.

Теорема 3.2 (середина отрезка) *Пусть точка A имеет координаты (x_1, x_2), а точка B — координаты (x_2, y_2). Если точка O есть центр этого отрезка, то её координаты (x_0, y_0) вычисляются по формуле*

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_0 &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}} \tag{3.2}$$

Если точка A имеет координаты $(3, 2)$, а точка B — $(5, 1)$, то середина отрезка есть точка с координатами

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4$$
$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

То есть $O(4, 3)$. Поставьте точки A, B, O в своих тетрадках и убедитесь в этом.

Важное удобство, предоставляемое декартовой системой координат — это сведение задач о пересечении отрезков, окружностей и разных других фигур к системам алгебраических уравнений.

Сложнейшие геометрические задачи Декарт с помощью своей системы координат научился решать просто. Он сводил их к системам уравнений и вычислению функций расстояний. Многие хитрые и сложные геометрические задачи у Декарта получали, возможно, длинное, но по сути простое решение. За это некоторые "истинные" геометры не любили Декарта. Они говорили, что Декарт превратил геометрию в мастерсткую ремесленников, доступной каждому. Они считали, что геометрия это искусство, наука для избранных, и не хотели, чтобы геометрические задачи решались так просто и механически.

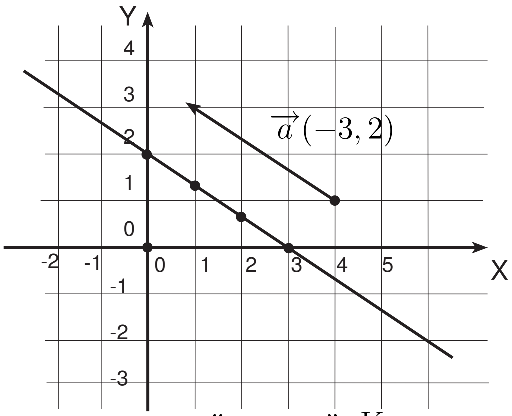
Ключевые задачи

Первое, что мы должны уметь рисовать – это прямая.

Уравнение прямой

Задача 3.1. Постройте на плоскости с декартовой системой координат точки, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$2x + 3y = 6. \tag{3.3}$$



Решение. Точки с $y = 0$ — это точки лежащие на оси x. Если мы подставим $y = 0$ в наше соотношение, то получим $2x = 6$ и $x = 3$. Таким образом, мы нашли "хорошую" точку на оси OX — точка $(3, 0)$. Если мы положим $x = 0$, то $3y = 6$ и $y = 2$, и мы получили другую хорошую точку $(0, 2)$. Будем подставлять различные x и получать подходящие для них y. Например, $x = 1$, $\Rightarrow 2 + 3y = 6$ и $3y = 4$, $y = 4/3$. Если $x = 2$, $\Rightarrow 4 + 3y = 6$ и $3y = 2$, $y = 2/3$. Это значит, что точки $(1, 4/3)$ и $(2, 2/3)$ тоже подходят. Они отмечены на рисунке. Видно, что они лежат на одной прямой. Как доказать это?

Предлагается такое интуитивное доказательство. Точка $(3, 0)$ — хорошая. Если теперь сдвинемся влево на расстояние $3a$ и и поднимемся на расстояние $2a$, то попадем снова в хорошую точку (в точку, координаты которой удовлетворяют соотношению 3.3). Действительно, координаты этой точки будут $(3 - 3a, 2a)$, то есть $x = 3 - 3a$, $y = 2a$. После подстановки в (3.3) получается

$$2(3 - 3a) + 3(2a) = 6,$$

что после раскрывания скобок дает

$$6 - 6a + 6a = 6,$$

— это верно при любом a. Значит, как бы мы не смещались в направлении стрелки $\overrightarrow{a}(-3, 2)$ из точки $(3, 0)$, мы будем попадать в хорошие точки.

Итак, уравнение $2x + 3y = 6$ на декартовы координаты задает прямую. А какие еще уравнения задают прямые?

!

Любая прямая задается уравнением вида

$$ax + by + c = 0$$

Это наиболее подходяший вид уравнения прямой. Когда уравнение прямой задано в таком виде, легко нарисовать эту прямую. Чтоб нарисовать прямую достаточно двух точек.

Пусть этими точками будут точки пересечения этой прямой с осями координат. Как их найти? На оси OX находятся точки, у которых координата $y = 0$, а на оси OY находятся точки, у которых $x = 0$. Положим $x = 0$. Из уравнения прямой получим

$$a \cdot 0 + by = c, \quad \Rightarrow by = c, \quad \Rightarrow y = c/b.$$

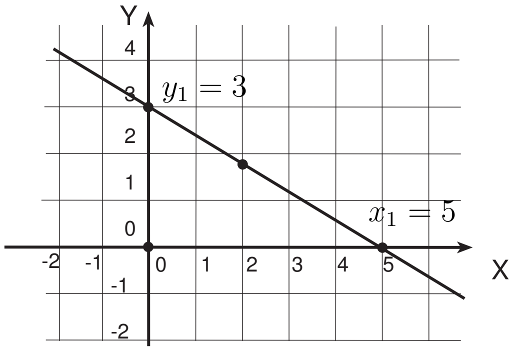
Таким образом, одну точку нашей прямой мы нашли — точка $A_y(0, c/b)$. Эта точка лежит на оси OY. Положим $y = 0$ и найдем точку, которая лежит на оси OX. Это точка $A_x(c/a, 0)$. Таким образом,

! Точки пересечения прямой с осями координат имеют координаты

$$A_x(c/a, 0), \quad A_y(0, c/b).$$

Эти координаты будем обозначать буквами x_1 и y_1.

$$x_1 = c/a, \quad y_1 = c/b.$$



Например, возьмем уравнение

$$3x + 5y = 15.$$

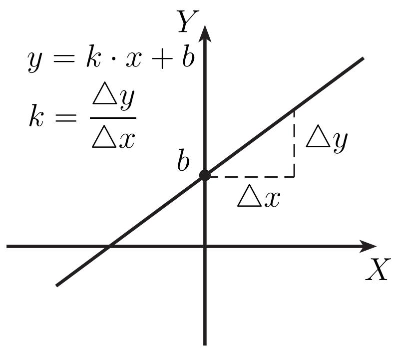
Для него $a = 3$, $b = 5$. Поэтому

$$x_1 = 15/3 = 5,$$

$$y_1 = 15/5 = 3.$$

А что, если $b = 0$ или $a = 0$? Тогда возникает деление на ноль, что плохо. Например, если мы попробуем вычислить $x_1 = c/a$ у прямой $2y + 4 = 0$, то получим $4/0$, а на 0 делить нельзя. В чем дело? Ответ прост — прямая $2y + 4 = 0$ не пересекается с осью x. Это уравнение дает $y = -2$, то есть прямая которая на 2 ниже оси OX и параллельна ей. Если в уравнении прямой не встечается слагаемое с x, значит эта прямая параллельна оси OY. Если в уравнении прямой не встречается y, то эта прямая параллельна оси y.

У прямой есть еще такое понятие как **угловой коэффициент**. Этот коэффициент ничего не говорит о положении прямой. Угловой коэффициент определяет лишь как направлена прямая. Посмотрите, для того, чтобы из точки A_x добраться до точки A_y, нужно подняться вверх на 3, и сдвинуться влево на 5. То есть увеличить y на 3, и уменьшить x на 5. Таким образом, $\triangle y = 3$, $\triangle x = -5$.



Определение 3.1 *Угловым коэффициентом прямой называется число*

$$k = \frac{\triangle y}{\triangle x} \tag{3.4}$$

! Для прямой $ax + by + c = 0$ угловой коэффициент равен

$$k = -\frac{a}{b}$$

У нашей прямой $3x + 5y = 15$ угловой коэффициент равен $k = -3/5$. У прямой $3x + 5y - 200 = 0$ точно такой же угловой коэффициент.

У прямой $y = 100x + 17$ угловой коэффициент равен 100.

Если из уравнения $ax + by + c ==$ выразить y, то получится

$$by = -ax - c, \quad y = \left(-\frac{a}{b}\right)x - \frac{c}{b} = k \cdot x + d.$$

Если прямая уравнение прямой записано относительно y, например $y = 10x+4$, то угловой коэффициент есть просто коэффициент при x.

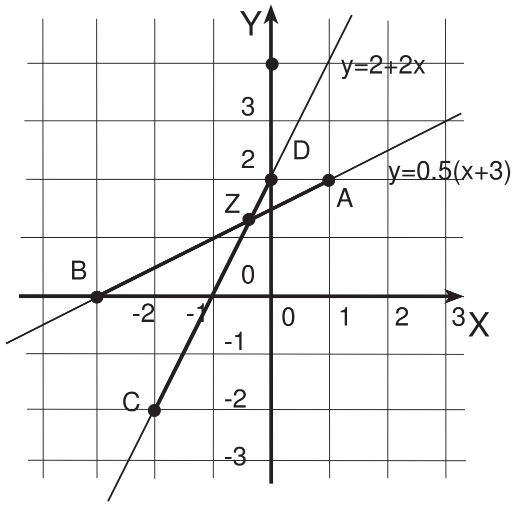
Пересечение прямых

Задача 3.2. Найдите точку пересечения прямых $x + y = 3$ и $x + 2y = 2$.
Решение. Найти точку пересечения — значит найти её координаты. Эти координаты, (x, y), должны удовлетворять уравнению как первой, так и второй прямой, потому что точка пересечения принадлежит и первой, и второй прямой. Значит мы должны решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

Ответ: Точка пересечения имеет координаты $(x, y) = (4, -1)$. Нарисуйте прямые и проверьте этот факт графически.

Задача 3.3. Найдите точку пересечения отрезков AB и CD, если $A(1, 2)$, $B(-3, 0)$, $C(-2, -2)$, $D(0, 2)$.
Решение. Первое, что нужно сделать — найти уравнения прямых, на которых лежат отрезки AB и CD. Посмотрите на прямую AB. При смещении на одну клетку вправо, мы поднимаемся по этой прямой на две клетки вверх. Кроме того, прямая AB пересекается с осью OX в точке $(0, 2)$, значит при $x = 0$ уравнение этой прямой должно давать $y = 2$. Из этих соображений мы догадываемся до уравнения



$$AB: \ y = 2x + 2.$$

Действительно, при $x = 0$, получается $y = 2 \cdot 0 + 2 = 2$, при $x = -1$, $y = 0$. Член $2x$ и означает, что при смещении вправо на одну клетку, надо подниматься на две.

Теперь исследуем прямую CD. Видно, что при $x = 3$, $y = 0$. Это значит что $y = k(x+3)$, где k какое-то число. При смещении вправо на две клетки, мы поднимаемся по прямой CD только на одну. Это значит, что $k = 1/2$ и $y = (1/2)(x + 3)$.

$$CD: \ y = (1/2)x + 3/2.$$

Число $3/2$ указывает на место, где прямая CD пересекает ось OY.

Точка пересечения отрезков — это точка, которая лежит и на первой и на второй прямой, то есть удовлетворяет и первому и второму уравнению:

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = x/2 + 3/2. \end{cases}$$

Пишем $2x + 2 = x/2 + 3/2$, переносим все что с x в одну часть, все, что осталось, – в другую.

$$3/2x = -1/2,$$

$$x = -1/3.$$

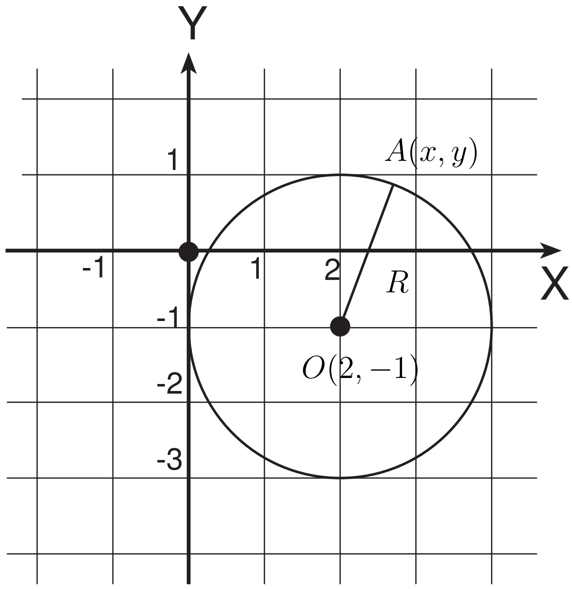
Осталось по x вычислить y. Подставляем x в $y = 2x + 2$ и находим $y = 2(-1/3) + 2 = \frac{4}{3}$.
Ответ: точка пересечения есть $(-1/3, 4/3)$.

Расстояние между точками и уравнение окружности

Задача 3.4. Найдите расстояние между точкой $A(3,2)$ и $B(5,1)$.
Решение. Посмотрите где расположены эти точки. Из точки A можно добраться до точки B сдвинувшись вправо на 2 и вниз на 1. Таким образом, AB это гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 2 и 1. По теореме Пифагора находим что $AB^2 = 1^2+2^2 = 5$, то есть Ответ: $AB = \sqrt{5}$.

Задача 3.5. Напишите уравнение окружности с центром в точке $O(0,0)$ радиуса $R = 2$.
Решение. Расстояние от точки $O(0,0)$ до точки $A(x,y)$ равно $\sqrt{x^2+y^2}$, так как OA есть гипотенуза в прямоугольном треугольнике с катетами x, y. Окружность — это все точки, для которых $\sqrt{x^2+y^2} = 2$. Это и есть ответ, который можно переписать в виде

$$x^2 + y^2 = 4.$$



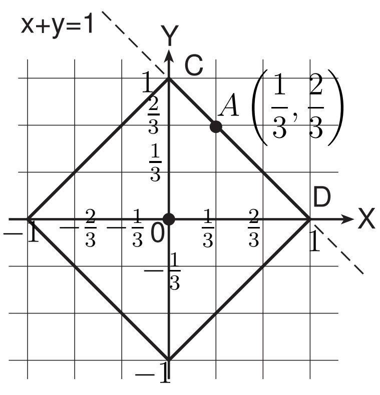
Задача 3.6. Напишите уравнение окружности с центром в точке $O(2,-1)$ радиуса $R = 2$.
Решение. Расстояние от точки $O(2,-1)$ до точки $A(x,y)$ равно $|OA| = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$. Как видите в функции расстояния знаки просто поменялись.

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

! Окружность с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом R задается уравнением

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2.$$

Задача с модулем



Задача 3.7. Нарисуйте множество точек, чьи координаты удовлетворяют уравнению $|x| + |y| = 1$.
Решение. Суть этого уравнения в том, что модули x и y не слишком большие и в сумме дают 1. Если $y = 0$, то модуль x должен быть равен 1. Подходит $x = 1$ и $x = -1$. То есть точки $(1,0)$ и $(-1,0)$ подходят. Подходят также точки $(0,1)$, $(0,-1)$. Заметьте, что наше уравнение симметрично относительно x и y. Точка $(1/2, 1/2)$ подходит. А значит подходят и точки

$$(1/2, -1/2),\ (-1/2, 1/2)\ (-1/2, -1/2).$$

Нетрудно видеть также, что точка $A(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ тоже подходит. Вообще, при $x > 0$ и $y > 0$ мы можем отбросить знаки модуля. Получается $x + y = 1$ — это прямая. Мы можем смело нарисовать кусочек этой прямой для которого $x > 0$ и $y > 0$. Прямая нарисована пунктиром. Отрезок CD и есть искомый кусочек прямой. Остается дорисовать картинку так, чтоб она была симметрична. Со временем вы научитесь догадываться, когда картинку можно симметрично дорисовывать.

Задачи для решения в классе

I

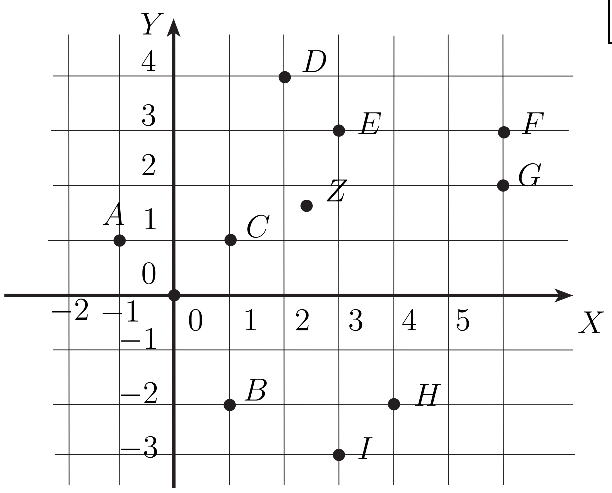


Рис. 3.1.

Задача 3.8. Найдите декартовы координаты всех точек на рисунке 3.1.

Задача 3.9. Укажите у каких точек на рисунке 3.1 совпадают а) абсциссы, б) ординаты?

Задача 3.10. Оцените “на глазок” координаты точки Z.

Задача 3.11. Найдите расстояние между точкой A и точками B, C, D.

Задача 3.12. Заштрихуйте область плоскости, где $x > 0$ и $y < 0$.

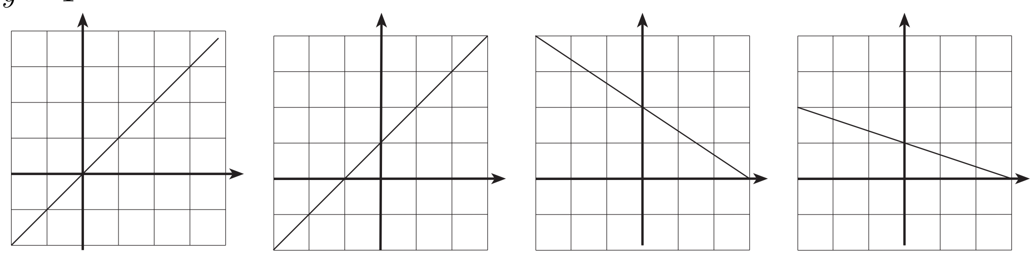
Задача 3.13. Напишите уравнение прямой совпадающей а) с осью OY, б) с осью OX.

Задача 3.14. Чему равен угловой коэффициент прямой $2y = 1000x - 111$?

II

Задача 3.15. Найдите расстояние между точкой $S(17, 3)$ и $T(15, -3)$.

Задача 3.16. Нарисуйте на плоскости с декартовой системой координат множество точек, чьи координаты удовлетворяют соотношению а) $x+y = 1$, б) $x-y = 1$, в) $-x+y = 1$, г) $-x - y = 1$



а) б) в) г)

Рис. 3.2: К задаче 3.17.

Задача 3.17. На рисунке 3.2 несколько прямых. Запишите их уравнения сначала в виде $y = kx + b$, а потом в виде $ax + by = c$.

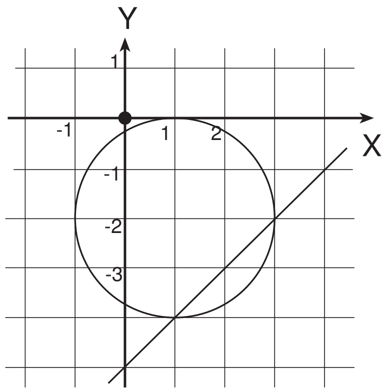
Задача 3.18. Нарисуйте на плоскости с декартовой системой координат множество точек, чьи координаты удовлетворяют соотношению а) $x+2y=0$, б) $x+2y=1$, в) $x+2y=3$, г) $x+2y=-3$

Задача 3.19. Нарисуйте на плоскости с декартовой системой координат множество точек, чьи координаты удовлетворяют соотношению $y=|x|$.

III

Задача 3.20. Нарисуйте на плоскости с декартовой системой координат множество точек, чьи координаты удовлетворяют соотношению $(x+1)^2+y^2=9$.

Задача 3.21. Какие координаты имеет центр окружности? Напишите уравнение этой окружности и уравнение прямой, которая её пересекает. Какие координаты у точек пересечения? Чему равно расстояние центра окружности до прямой?



Задача 3.22. Укажите область (закрасьте карандашом), где $|x|+|y|<1$.

Задача 3.23. При каких значениях c прямая $x+y+c=0$ имеет общие точки (точку) с окружностью $x^2+y^2=1$.

Задача 3.24. Нарисуйте прямые $2x+7y=14$, $2x-7y=14$, $-2x+7y=14$, $-2x-7y=-14$ и найдите их угловые коэффициенты.

Домашнее задание

I

Задача 3.25. Нарисуйте декартову систему координат. Соедините линией точки $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(3,1)$, $(2,1)$, $(1,1)$ $(3,3)$, $(0,0)$, $(-2,-3)$. На что это похоже?

Задача 3.26. Нарисуйте декартову систему координат. Соедините линией точки $(0.5,0)$, $(0.5,1)$, $(-2.5,1)$, $(-2.5,-1)$, $(0.5,-1)$, $(0.5,0)$. Какие координаты имеет центр данной фигуры?

Задача 3.27. Найдите длины отрезков BC, BD, CF, GF из рисунка 3.1.

Задача 3.28. Найдите координаты самой верхней, самой нижней, самой левой и самой правой точки окружности на рисунке к задаче 23 на странице 23.

Задача 3.29. Нарисуйте прямую $2y=3x-6$. Чему равен её угловой коэффициент? Укажите в каких точках эта прямая пересекается с осями координат.

Задача 3.30. Пересекаются ли отрезки AB и CD, если их координаты $A(0,0)$, $B(-3,5)$, $C(-1,4)$, $D(1,-1)$. Какие координаты у точки пересечения, если она есть?

Подсказка. Нарисуйте систему координат взяв за единицу две клеточки поставьте точки и посмотрите.

Задача 3.31. Через точку $A(3,4)$ проведена прямая, параллельная оси OX. Найдите координаты точки пересечения этой прямой с осью OY.

Задача 3.32. Нарисуйте множество точек, заданных уравнением $x = -y + 2$.

Задача 3.33. Запишите уравнение окружности с центром $O(0,0)$ и радиусом 10. Укажите координаты трёх различных точек, которые лежат на этой окружности.

Задача 3.34. Укажите область (закрасьте карандашом), где $x > y$.

Задача 3.35. Найдите координаты центра отрезка AB, если $A(2,3)$, $B(-2,5)$. Нарисуйте декартову систему координат и отметьте эти точки.

II

Задача 3.36. Пересекаются ли отрезки AB и CD, если их координаты $A(-1,0)$, $B(0,5)$, $C(-1,5)$, $D(4,4)$? Если пересекаются, то найдите точку пересечения.

Задача 3.37. Найдите длины отрезков AH, BE, FB, GI.

Задача 3.38. Нарисуйте множество точек, заданных уравнением $|x| = |y|$.

Задача 3.39. Нарисуйте прямую $-2y = 3x - 10$. Чему равен её угловой коэффициент? Укажите в каких точках эта прямая пересекается с осями координат.

Задача 3.40. Найдите точку пересечения прямых, заданных уравнениями $x+2y+3 = 0$, $4x + 5y + 6 = 0$.

Задача 3.41. Нарисуйте декартову систему координат и поставьте несколько точек, удовлетворяющих уравнению $x^2 = y$. Соедините их гладкой линией.

Задача 3.42. Найдите координаты центра отрезка AB, если $A(-2,3)$, $B(-6,5)$. Нарисуйте декартову систему координат и отметьте эти точки. Найдите координаты точки M, которая лежит на отрезке AB и $AM = 2MB$.

Задача 3.43. Известны координаты трех вершин параллелограмма: $(1,0)$, $(1,0)$, $2,3$. Найдите коордитаты четвертой вершины. Найдите два различных решения.

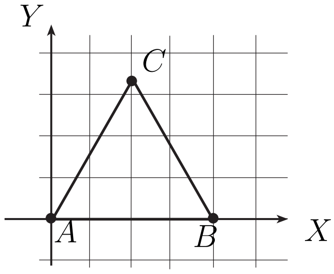
Подсказка. Нарисуйте и посмотрите.

Задача 3.44. Укажите область (закрасьте карандашом), где $x + 1 < 2y$.

Задача 3.45. Даны прямые:
1) $x = 3$, 2) $x + y = 3$, 3) $x = 0$, 4) $x = 3 - y$, 5) $y = 0$, 6) $x + 2y = 1$, 7) $2x + y = 1$.
Какие пары прямых параллельны?

III

Задача 3.46. Центр первой окружности находится в точка $O_1(0,0)$, её радиус $R_1 = 5$; центр второй — точка $O_2(6,0)$, $R_2 = 7$. Найдите координаты точек пересечения этих окружностей.



Задача 3.47. Правильный треугольник расположен так как показано на рисунке — точка A совпадает с началом координат, сторона AB идет вдоль оси OX. Его стороны равны 1. Найдите координаты его вершин.

Примечание. На рисунке координатная решетка нарисована с шагом 0.25.

Задача 3.48. Нарисуйте множество точек, заданных уравнением $|x-y|+|x+y|=4$.

Подсказка. Попробуйте угадать насколько точек. Например $(0,2)$, $(2,0)$, $(1,2)$, $(1,2)$ подходят. Какие еще подходят? Вспомните, как выглядит решение $|x|+|y|=1$.

Задача 3.49. Нарисуйте множество точек, заданных уравнением $|x|=|x-2|$.

Задача 3.50. Найдите синус угла, который образует прямая $2y=2x+3$ с осью OY.

Задача 3.51. Найдите на оси x точку, равноудаленную от точек $(1,2)$ и $(2,3)$.

Задача 3.52. Центр окружности радиуса $R=2$ находится в точке $A(5,0)$. К окружности из точки $O(0,0)$ проведена прямая, касающаяся этой окружности. Найдите уравнение этой прямой.

Задача 3.53. Найдите координаты центров отрезков AB, BC, CA, если $A(-2,3)$, $B(-6,5)$, $A(0,0)$. Нарисуйте декартову систему координат и отметьте эти точки. Проведите медианы в треугольнике $\triangle ABC$ и найдите координаты точки пересечения медиан.

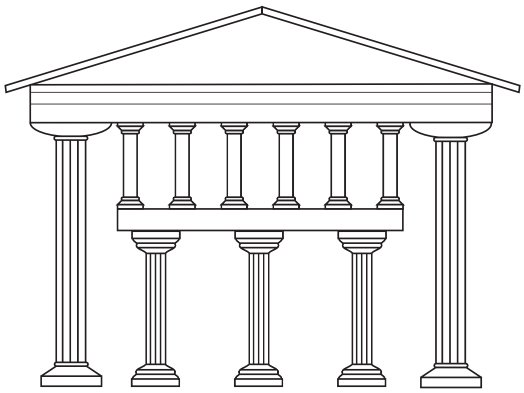
Семинар 4

Алгебра КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

План занятия

- Золотое сечение
- Какие еще бывают уравнения
- Корни квадратного уравнения
- Теорема Виета

Золотое сечение и архитектура

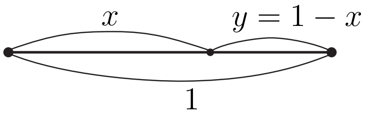


Исследователи архитектуры Древней Греции не раз замечали, что пропорции архитектурных сооружений удовлетворяют определенному отношению. А именно отношение высоты к ширине (или наоборот) равно примерно 1.618. Именно такая пропорция делала произведения искусства наиболее красивыми и гармоничными с точки зрения эстетического восприятия.

Вот примерный перевод греческого мастера Политекта “.. та пропорция несёт в себе большую гармонию, что дает отношение длины меньшей части к большей такое же, что и отношение большего к целому.”

Сформулируем математическую задачку:

Задача 4.1. На единичном отрезке поставьте такую точку, которая разделила бы его на два отрезка таких, что отношение меньшего к большему такое же, что и отношение большего отрезка к единичному отрезку.



$$\frac{y}{x} = \frac{x}{1}$$

Решение. Получаем уравнение $\frac{1-x}{x} = x$, $\Rightarrow 1 - x = x^2$, и

$$x^2 + x - 1 = 0 \tag{4.1}$$

Это квадратное уравнение. Как его решать? Давайте сделаем то, что называется *выделением полного квадрата* — найдем такое a, что $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ даёт первые два слагаемые такие же, что и в нашем квадратном уравнении. Подходящее $a = \frac{1}{2}$:

$$(x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

Слагаемые $x^2 + x$ в (4.1) можно заменить на $(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$, получим:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0, \text{ то есть}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Отсюда легко получить ответ:

$$(x + \frac{1}{2}) = +\sqrt{\frac{5}{4}}, \Rightarrow\ x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \Rightarrow\ x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

или

$$(x + \frac{1}{2}) = -\sqrt{\frac{5}{4}}, \Rightarrow\ x + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \Rightarrow\ x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Второй случай нам не подходит, так как x получается отрицательным числом. Нужный нам ответ

$$x = \varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.618034...$$

Это число и есть золотое сечение, замечательная пропорция красоты и гармонии. Многое отрезки в пятиконечной звезде находятся в этой пропорции.

Что значит решить уравнение и какие уравнения бывают

Определение 4.1 *Уравнения на x вида*

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{4.2}$$

называется квадратным уравнением, если $a \neq 0$.

Примеры квадратных уравнений:

$$\begin{array}{ll} x^2 + 3x - 4 = 0, & -x^2 - 2x + 3 = 0, \\ x^2 = 4, & x^2 + x = 2x^2 + 3, \\ x^2 - 4x = 12, & x^2 = x + 1. \end{array}$$

Все эти уравнения содержат x^2. Уравнение $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ — пример кубического уравнения, максимальная степень x в нём равна 3. Нетрудно догадаться, что такое уравнения четвертой, пятой степени и так далее. Бывают уравнения, которые не являются уравнениями n-ой степени, например $cosx = x$.

Как вы уже догадались,

Определение 4.2 ***Уравнение** — это два выражения, зависящих от переменной x (возможно y, z или другая буква), между которыми стоит знак равно. **Решить уравнение**, значит найти подходящие x. Подходящие x — это такие значения x, которые превращают уравнение в верное тождество.*

“Хорошие” x называются корнями уравнения. Решить уравнение, значит коротко и ясно описать множество всех корней. Но иногда само уравнение является лучшим описанием этого множества.

Задача 4.2. Решите уравнение $(x-1)(x-2)=0$.
Решение. Произведение равно нулю, когда либо первый либо второй множитель равны нулю. То есть либо $(x-1)=0$, либо $(x-2)=0$, и $x=1$ либо $x=2$.

Задача 4.3. Решите уравнение $z^2=9$.
Решение. Понятно, что $z=3$ подходит, но еще в таких случаях надо не забывать про отрицательный корень $z=-3$. Ответ: $z=3$ или $z=-3$.

Задача 4.4. Решите уравнение $(1-x^2)(x+2)=0$.
Решение. Либо $(1-x^2)=0$, либо $(x+2)=0$. Первое равенство означает $x^2=1$, что дает два варианта для x: 1 или -1. Второе равенство дает $x=-2$. Ответ: $x=1$ или $x=-1$ или $x=-2$. Ответ можно было записать так

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right. \quad \text{или так} \quad x\in\{1,-1,-2\}.$$

Задача 4.5. Решите уравнение $x^2+1=0$.
Решение. Число x^2 всегда больше либо равно нулю. Поэтому, его сумма с 1 положительное число, которое не может равняться нулю. “Хороших” x нет. В таких случаях надо писать, что **множество корней пусто** или **корней нет**.

Задача 4.6. Решите уравнение $y^2=y$.
Решение. Когда квадрат числа равен самому числу? Можно догадаться, что $y=0$ и $y=1$ подходят. Но нет ли других корней. Чтобы убедиться в том, что нет, давайте перенесём все в одну часть и вынесем y за скобку:

$$y-y^2=0, \Rightarrow\ y(1-y)=0, \Rightarrow\ y=0 \text{ или } (1-y)=0$$

Если ни один из множителей не равен нулю, то их произведение не может быть равно нулю. Поэтому Ответ: $y\in\{0,1\}$.

Алгоритм решения квадратных уравнений

Прежде чем решать квадратное уравнение, перенесите все слагаемые в одну часть. Число, на которое умножен x^2 в уравнении называется коэффициентом при x^2. У вас еще может быть слагаемое с x и свободный член. Рассмотрим уравнение

$$x^2-3x+2=0$$

Коэффициент при x^2 равен $a=1$, коэффициент при x равен $b=-3$, свободный член $c=-2$. Эти три числа определяют квадратное уравнение и корни уравнения зависят от этих чисел. Проделаем процедуру выделения полного квадрата $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$. Чтобы $2ax=-3x$, необходимо $a=-3/2$. $(x-3/2)^2=x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2$, поэтому $x^2-3x=(x-\frac{3}{2})^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2$ Наше уравнение превращается в

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=0$$

После несложных преобразований получаем

$$x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2},$$
$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = -2 \text{ или } -1.$$

Таким образом идея выделения полного квадрата позволяет нам находить корни квадратного уравнения. Если мы проделаем процедуру выделения квадрата в общем виде для уравнения (4.2), то получим

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c},$$

а затем

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c}.$$

Конечные формулы для нахождения двух корней квадратного уравнения выглядят так

!

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (4.3)$$

Теорема Виета

Теорема Виета — это очень замечательная, полезная штука. Она позволяет угадывать корни квадратного уравнения. Она утверждает следующее:

Теорема 4.1 (Виета) *Пусть есть квадратное уравнение:*

$$x^2 + bx + c = 0$$

Его корни равны x_1 и x_2 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} b = -(x_1 + x_2) \\ c = x_1 \cdot x_2 \end{cases}$$

Например, уравнение $2x^2 - 6x + 4 = 0$. Первое, что сделаем — это разделим на 2, чтобы при x^2 стояла единичка.

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Число 2 есть произведение корней, а 3 — их сумма. Очевидно, что $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ подходят. Они и есть корни этого уравнения.

Ключевые задачи

Задача 4.7. Составьте квадратное уравнение, у которого корни равны $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.
Решение. Надо просто-напросто раскрыть скобки в $(x-3)(x-4) = 0$ Получается $x^2 - 4x - 3x + 12 = 0$, что дает Ответ: $x^2 - 7x + 12 = 0$. Другой способ решить эту задачку заключается в применении теоремы Виета:

$$b = -(x_1 + x_2) = -(3+4) = -7,$$

$$c = x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 4 = 12.$$

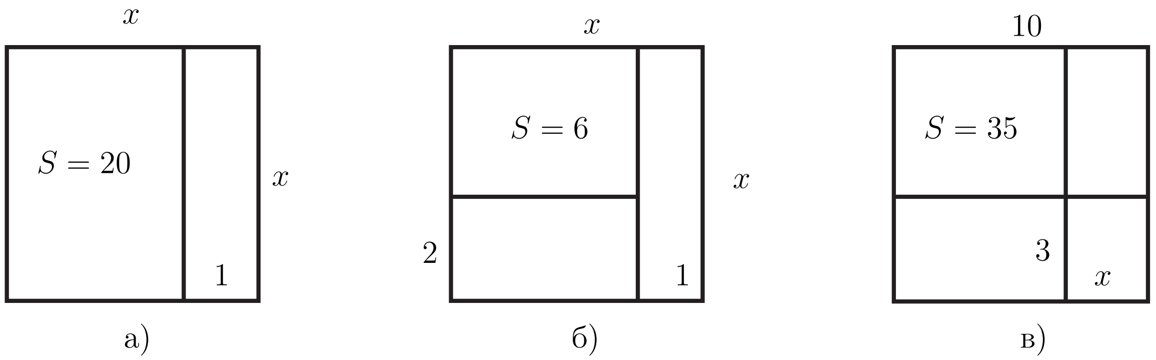


Рис. 4.1.

Задача 4.8. Найдите x на рисунке 4.1 а).
Решение. На этом рисунке от квадрата со стороной x отрезана полоска шириной 1. Площадь оставшейся части равна 20. Площадь всего квадрата равна x^2, площадь полоски равна $1 \cdot x$. Площадь квадрата равна сумме площадей полоски и прямоугольника площадью 20:

$$x^2 = 20 + x.$$

Решаем это квадратное уравнение. Перенесем все в одну часть:

$$x^2 - x - 20 = 0.$$

Находим $a = 1$, $b = -1$, $c = -20$. Находим дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 1 + 80 = 81.$$

Находим корни квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = 5;\ -4.$$

То есть $x_1 = 5$, $x_2 = -4$. Но второй корень лишний, так как отрезков с отрицательными длинами не бывает. Ответ: $x = 5$.

Задача 4.9. Выделите полный квадрат из трёхчлена $A(x) = -3x^2 + 6x - 9$.
Решение. Сначала вынесем за скобку -3:

$$A(x) = -3x^2 + 6x - 9 = -3(x^2 - 2x + 3).$$

Чтобы в разложении $(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$ слагаемое $2ax$ совпадало с $-2x$, нужно чтобы $a=-1$. Раскладываем $(x-1)^2 = x^2-2x+1$. Значит

$$A(x) = -3(x^2-2x+3) = -3\left((x-1)^2-1+3\right)$$

Прибавили -1, так как лишняя единичка вылезет при раскрытии квадрата $(x-1)^2 = x^2-2x+1$. В итоге получаем
Ответ: $A(x) = -3\left((x-1)^2+2\right) = -3(x-1)^2-6$.

Задачи для решения в классе

$\boxed{\text{I}}$

Задача 4.10. Решите уравнение $(x-2)(x-4)^2 = 0$.

Задача 4.11. Решите уравнение $(x-2) = (x-4)^2$.

Задача 4.12. Решите уравнение $x^2 = (x-10)^2$.

Задача 4.13. Дано уравнение:

$$x^2+(x+1)^2 = 5x$$

Раскройте все скобки соберите все с левой стороны и приведите подобные слагаемые. Укажите, чему равны коэффициенты a, b и c, и решите получившееся квадратное уравнение.

Задача 4.14. Давайте методом перебора догадаемся до корней уравнений

$$x^2-3x-4=0, \quad x^2-4x+3=0, \quad x^2+x-2=0.$$

$\boxed{\text{II}}$

Задача 4.15. Найдите стороны прямоугольника, если известно, что одна сторона на 2 см длиннее другой, а площадь равна 24 см^2.

Задача 4.16. Найдите сумму и произведение чисел $2+\sqrt{2}$ и $2-\sqrt{2}$. Пользуясь теоремой Виета, напишите квадратное уравнение, корнями которого являются эти числа.

Задача 4.17. Найдите корни уравнения $(x+1)^4+4=0$.

Задача 4.18. Решите уравнение $(x-1)^2+(x+1)^2 = 2+2x$.

Задача 4.19. На рисунке 4.2 изображен квадрат со стороной $2x$. Используя данные, приведенные на этом рисунке найдите x.

Задача 4.20. Уравнение $(2x-1)(2x+1) = x(2x+3)$ приведите к виду $ax^2+bx+x=0$.

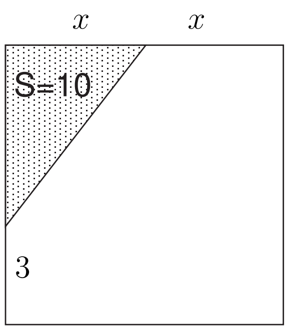


Рис. 4.2.

$\boxed{\text{III}}$

Задача 4.21. Найдите корни уравнения
$$(x-100)^{100}(x+200)^{200} = 0.$$

Задача 4.22. Найдите корни уравнения

$$2(x-1)(x+2)x = (x-1)(x+2)^2$$

Задача 4.23. Найдите корни уравнения $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}} = x.$

Задача 4.24. Посмотрите на задачу 2.18 на странице 2.18. Там показано, что

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Решите обратную задачу — найдите $\sin\alpha$, если известно число $\sin 2\alpha$, а именно, найдите $\sin 15°$, зная, что $\sin 30° = 1/2$.

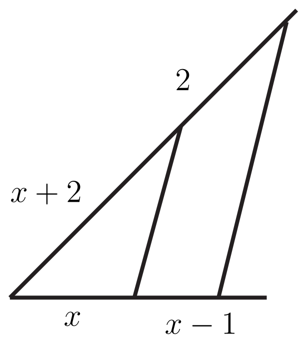
Подсказка. Возведите тождество $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ в квадрат и подставьте туда

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha.$$

Домашнее задание

I

Задача 4.25. На рисунке справа угол пересечен параллельными прямыми. Указаны длины отрезков, на которые они разделили стороны угла. Найдите x.



Задача 4.26. Уравнение $(x-2)(x+2) = x(x+3)$ приведите к виду $ax^2 + bx + x = 0$.

Задача 4.27. Придумайте квадратное уравнение, корнями которого являются числа 1 и -2.

Задача 4.28. Найдите сумму и произведение чисел $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$. Пользуясь теоремой Виета, напишите квадратное уравнение, корнями которого являются эти числа.

Задача 4.29. Решите уравнение $(x-2)(x+5) = 0$.

Задача 4.30. Решите уравнение $x^4(x^2+x-1) = 0$.

Задача 4.31. От квадрата со стороной x отрезали полоску ширины 2. Найдите x, если известно, что площадь оставшейся части равна 8 см.

Задача 4.32. Найдите x на рисунке 4.1 б).

Задача 4.33. Решите уравнение $(x-4)^2 = (x+6)^2$.

II

Задача 4.34. Если раскрыть скобки в $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, то получится многочлен 4-ой степени. Чему равен его свободный член?

Задача 4.35. Найдите x на рисунке 4.1 в). На этом рисунке сторона большого квадрата равна 10. Он разделен на прямоугольники площадь одного из них равна 35, а у другого прямоугольника стороны равны 3 и x.

Задача 4.36. Известно, что сумма квадратов корней квадратного уравнения равна 6, а сумма корней равна 4. Напишите это квадратное уравнение и найдите его корни.

Задача 4.37. Метеорит приближается к Земле с постоянно возрастающей скоростью, поэтому расстояние, которое он пролетает за время t (начиная с текущего момента) растет не линейно, а квадратично:

$$S(t) = 1000\frac{\text{м}}{c} \cdot t + 10\frac{\text{м}}{c^2} \cdot \frac{t^2}{2}$$

Сейчас он находится на расстоянии 6000 км = 6000000 м. Найдите время, через которое начнется Армагедон.

Задача 4.38. Существует ли такое натуральное число, что если его умножить на число, которое больше его на единицу, то получится число равное трем квадратам числа, которое меньше его на единицу?

Задача 4.39. Решите квадратное уравнение $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Задача 4.40. Найдите корни уравнения $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} = x$.

Задача 4.41. Придумайте уравнение, корнями которого являются числа 1, -2, 2.

Задача 4.42. Напишите уравнение, корнями которого являются как корни уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$, так и корни уравнения $x^2 - 5x = 0$.

Задача 4.43. Найдите x на рисунке 4.3 а). На этом рисунке прямоугольный треугольник. Один катет равен 1, другой катет больше его в x раз, и гипотенуза больше большего катета в столько же раз. Найдите x.

$\boxed{\textbf{III}}$

Задача 4.44. Найдите минимальное значение выражений а) $(x-3)^2 - 2$, б) $x^2 - 2x + 4$.

Задача 4.45. Найдите положительное число, если известно, что его сумма с обратным ему числом равна 2.9.

Задача 4.46. Запишите квадратное уравнение, среди корней которого будет $2 + \sqrt{3}$.

Задача 4.47. Решите уравнение $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1-x) = 1$.

Задача 4.48. Существует ли квадратное уравнение с целыми коэффициентами, одним их корней которого является число а) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, б) $1 + \sqrt[3]{3}$.

Задача 4.49. Придумайте уравнения n-ой степени, корнем которого является число число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

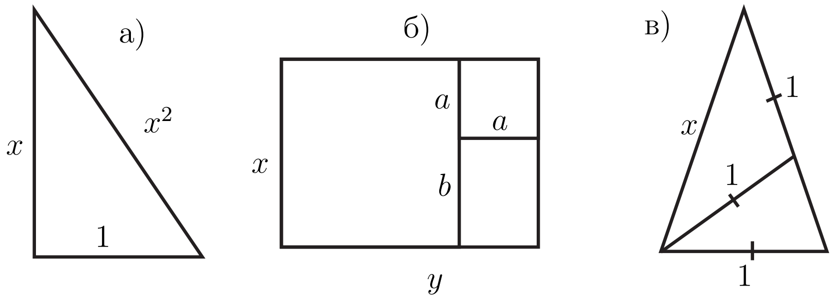


Рис. 4.3.

Задача 4.50. Найдите sin и cos четвертинки прямого угла.

Подсказка. Смотрите задачу 4.24. Используйте $\sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$.

Задача 4.51. Найдите отношение x/y на рисунке 4.3 б), если известно, что $a/b = x/y$. На этом рисунке в прямоугольник со сторонами x, y поместили два квадрата и прямоугольник со сторонами a и b.

Задача 4.52. Найдите x на рисунке 4.3 в).

Подсказка. Можно доказать, что уголы при основании в два раза больше, чем угол при вершине. Попробуйте доказать $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ и использовать этот факт.

Задача 4.53. Найдите корни уравнения $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}} = x.$

Семинар 5

Анализ
ГРАФИКИ

План занятия

- Как строить графики функций
- Примеры графиков функций
- Движение графиков
- Графики как траектории движения

Фонарик

Предположим вы находитесь в кромешной тьме и фонариком светите на пол. Какой формы будет световое пятно? Если фонарик направлен прямо вниз, то пятно будет круглое. Если же фонарик несколько наклонён, то пятно удлиняется и принимает форму эллипса. Если фонарик наклонен настолько, что верхняя кромка светового конуса идет параллельно полу, то световое пятно становится неограничинным и его граница является параболой. Если дальше продолжать наклонять фонарик, то граница светового пятна станет гиперболой.

Рис. 5.1: Световые пятна на полу, которые можно делать с помощью фонарика.

Окружность, эллипс, парабола и гипербола — кривые, с которыми вы часто будите встречаться в школах и институтах. Впрочем не только там. Круглые и эллиптические тела вы нередко встречаете в жизни. Парабола. По этой кривой летают брошенные вам камни. Параболическую форму имеют направленные антенны (параболические тарелки).

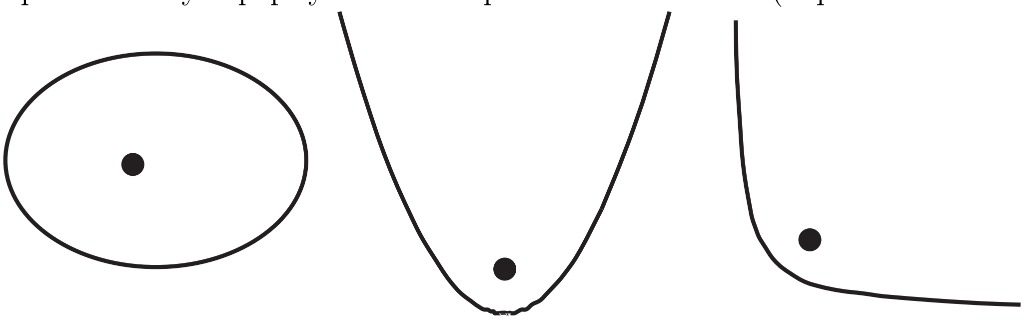


Рис. 5.2: Траектории, по которым умеют летать планеты.

Удивительно, но космические тела (планеты и кометы) вблизи массивного солнца летают именно по таким траекториям, которые можно получить как границу светового пятна от фонарика.

Парабола — кривая которой мы посвятим сегодняшнее занятие.

Парабола

Итак, парабола — это кривая падения камня.

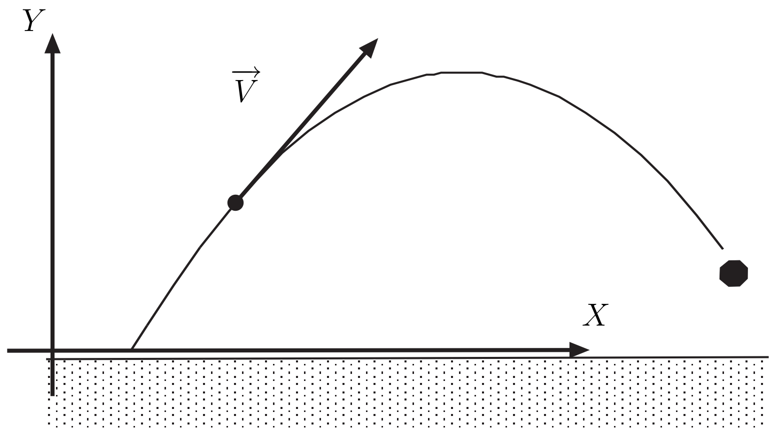


Рис. 5.3: Брошенный камень летит по параболе.

Общее уравнение параболы имеет вид

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c} \tag{5.1}$$

Простейшее уравнение параболы есть $y = x^2$. Давайте найдем несколько точек (то есть пар чисел (x, y)), которые удовлетворяют этому уравнению. Будем брать какой-нибудь x и находить y. Построим таблицу; в верхней строчке таблицы стоят значения x, а под ними соответствующие значения y:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9	16

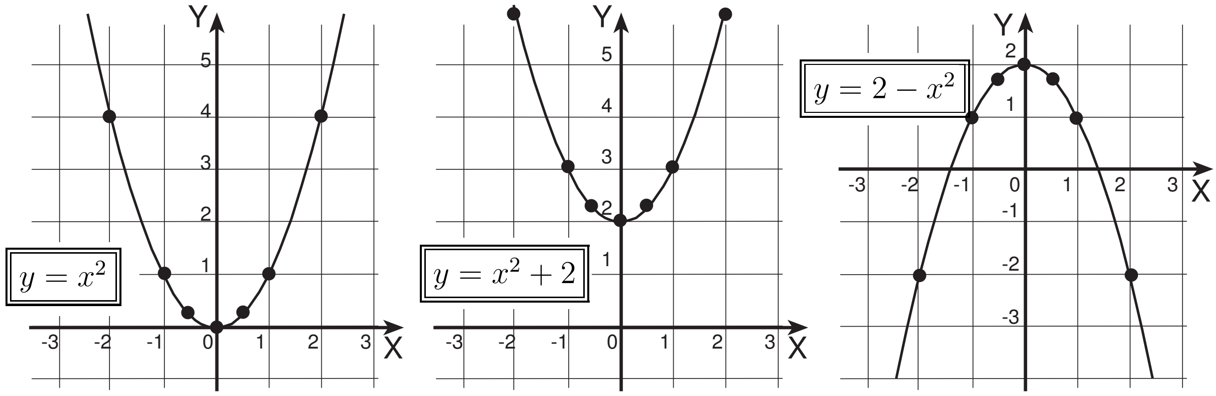


Рис. 5.4: Параболы.

Нарисуем декартову систему координат и поставим эти точки. Поставьте еще точки $(1/2, 1/4)$ и $(-1/2, 1/4)$. Сейчас мы уже готовы соединить эти точки гладкой кривой. Вот как выглядит парабола (самый левый график на рисунке 5.4). Только не подумайте, что так летают камни. Параболы, по которым летают камни перевернуты.

Давайте построим другую параболу, а именно, заданную уравнением $y = x^2 + 2$. Нарисуем табличку для неё.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	11	6	3	2	3	5	11	18

$y = x^2 + 2$

Как видите в этой табличке просто числа в нижней строчке на 2 больше, чем в предыдущей табличке.

Следующая парабола $y = 2 - x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-7	-2	1	2	1	-2	-7	-14

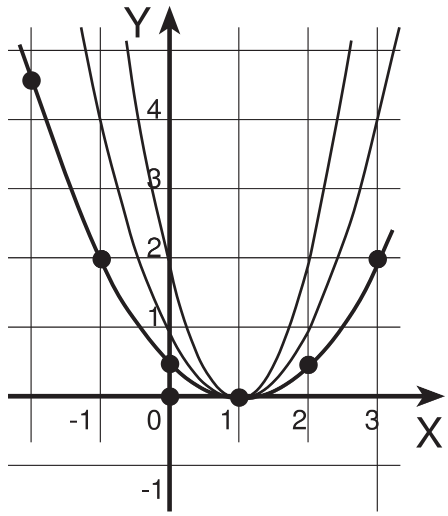
$y = 2 - x^2$

Если вы поэкспериментируйте дальше, то обнаружите, что все параболы

- имеют вершину, то есть точку максимума или минимума y, для параболы $y = x^2$ это точка $(0, 0)$;
- имеют две ветви, которые устремляются либо вверх, либо вниз;
- симметричны относительно вертикальной прямой, проходящей через вершину.

Нарисуем параболу:

$$y = 0.5(x-1)^2$$



Координата y принимает своё минимальное значение $y = 0$ при $x = 1$. Построим таблицу:

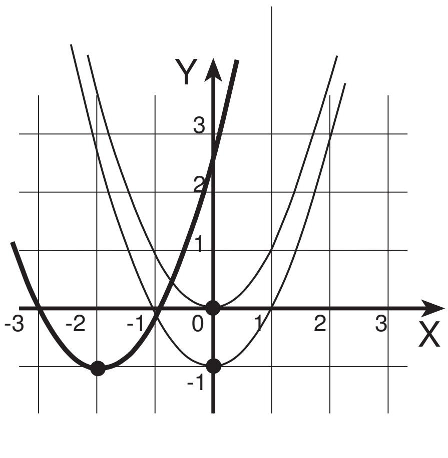
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5

Эта парабола сдвинута вправо на 1. Её вершина $(1, 0)$. Кроме того она несколько более сплюснута в вертикальном направлении. На рисунке тонкими линиями показаны параболы $y = (x-1)^2$ и $y = 2(x-1)^2$. Дагатайтесь какая из них какая.

Можно сказать, что коэффициент a в общей формуле параболы (5.1) отвечает за приплюснутость или растянутость параболы в вертикальном направлении.

Исследуем параболу $y = (x+2)^2 - 1$. Построим для неё табличку:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	-1	0	3	8	15



Как видите, вершина этой параболы есть точка $(-2, -1)$. Но посмотрите на уравнение. По его виду мы сразу могли догадаться, что минимальное значение y есть -1. Поскольку квадрат $(x+2)^2 \geqslant 0$, минимальное значение квадрата равно 0. В скобочках $(x+2)^2$ стоит ноль, когда $x = -2$. А значит

! Вершина параболы $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ есть точка (x_0, y_0).

Давайте эту параболу сдвинем вправо на 2. Вершиной сдвинутой параболы будет точка $(0, -1)$, а её уравнение будет иметь вид $y = x^2 - 1$. Если теперь эту параболу ещё раз сдвинуть уже вверх на 1, то получим простейшую параболу $y = x^2$.

Ответы на важные вопросы

Вопрос №1. Когда ветви параболы направлены вверх.

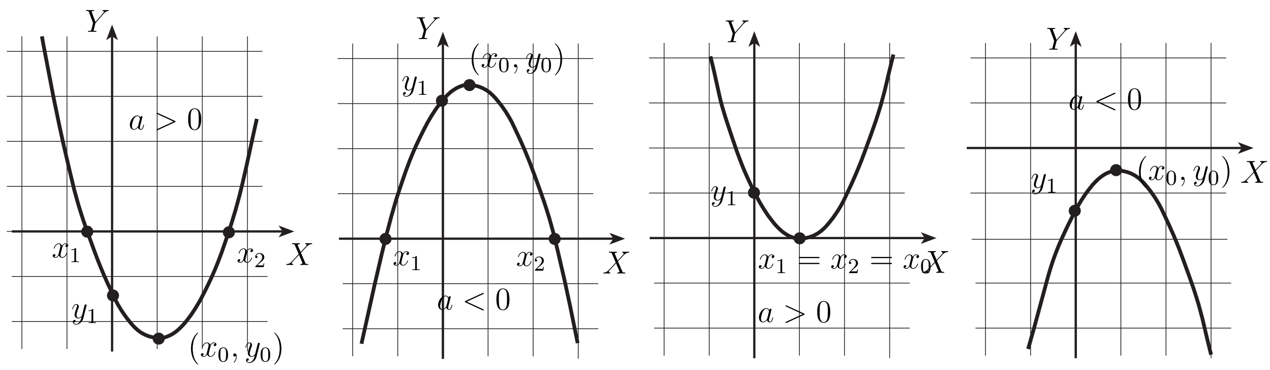
> **!** У параболы $y = ax^2 + bx + c$ ветви направлены вниз тогда, когда $a < 0$. Если $a > 0$ ветви направлены вверх.

Вопрос №2. Чему равны координаты вершины параболы?

> **!** У параболы $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ координата x_0 вершины вычисляется
>
> $$x_0 = -\frac{b}{2a} \tag{5.2}$$
>
> Зная координату x_0, легко найти координату y_0:
>
> $$y_0 = f(x_0).$$

Вопрос №3. Чему равны точки пересечения с осями координат?

> **!** Любая парабола $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ пересекается с осью y и точка пересечения единственна, это точка $(0, y_1)$, где
>
> $$y_1 = f(0) = \tag{5.3}$$
>
> Точек пересечения с осью x может не быть. Координаты x точек пересечения с осью x равны корням уравнения
>
> $$f(x) = 0 \tag{5.4}$$
>
> Они вычисляются по формуле 4.3 на странице 31.



а) б) в) г)

Задачи для решения в классе

I

Задача 5.1. Постройте табличку и нарисуйте параболу $y = x^2 - 2x$.

Задача 5.2. Постройте графики функций $y = (x+1)^2 - 3$ и $y = -2 * (x+1)^2 - 3$ на одном рисунке.

Задача 5.3. Найдите координаты вершины параболы $y = (x-2)^2 - 3$.

Задача 5.4. Укажите координаты точек пересечения парабол и осей координат OY: а) $y = (x-2)(x+3)$, б) $y = x^2 - 2x$, в) $y = -2(x-2)(x+3)$.

Задача 5.5. Найдите x_1, x_2, y_1, x_0, y_0 для параболы $y = (x+3)(x+5)$.

II

Задача 5.6. Найдите координаты вершины параболы $y = x - 4x + 3$. Куда направлены её ветви? Исходя из этого, ответьте есть ли корни у уравнения $x - 4x + 3 = 0$.

Задача 5.7. Найдите координаты вершины параболы $y = (x-2)^2 + x^2 + (x+2)^2$.

Задача 5.8. При каких значениях x выражение $x^2 + 2x - 3$ принимает положительные значения.

Задача 5.9. Петя бросил камень. Максимальная высота полета камня была 4 м. Камень приземлился на расстоянии 16 м от Пети. Пренебрегая ростом Пети напишите уравнение параболы, по которой летел камень. Считайте что ось Y направлена вверх, а ось X идет по земле в направлении бросания камня. Между прочим, физики по этим данным умеют определять вес камня.

Подсказка. Для начала найдите точки пересечения этой параболы с осью X, найдите координаты вершины параболы и подберите коэффициент a.

Задача 5.10. Найдите x_1, x_2, y_1, x_0, y_0 для параболы $y = x^2 - 4x + 3$.

Задача 5.11. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x^2 - 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Задача 5.12. Коэффициент a параболы равен -1, её вершина есть точка $(-1, 2)$. Нарисуйте эту параболу. Напишите её уравнение.

Задача 5.13. При каких a график функции $f(x) = x^2 - 2ax + 6a$ касается оси OX.

Подсказка. Касается оси OX значит, что вершина лежит на оси OX

Задача 5.14. Парабола задается уравнением $y = x^2 + 2x - 3$. Найдите координаты вершины параболы и точек её пересечения с осями. Напишите уравнение оси симметрии этой параболы.

Задача 5.15. Парабола пересекает ось X в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Найдите x_0 — координату x вершины параболы.

III

Задача 5.16. Дана парабола $y = x^2 + 1$, точка $F(0, 2)$ и прямая l, совпадающая с осью OX. Найдите координаты точки A на параболе с абсцисоой x. Найдите расстояние от точки A до точки F. Найдите расстояние от точки A до прямой l. Сравните расстояния.

Задача 5.17. Выделите полный квадрат в $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$ и постройте график этой функции.

Задача 5.18. Найдите x_1, x_2, y_1, x_0, y_0 для параболы $y = -x^2 - 4x + 10$.

Задача 5.19. Известны корни квадатного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Известна также точка пересечения параболы $y = ax^2 + bx + c$ с осью OY — $y_1 = -5$. Восстановите это квадратное уравнение.

Задача 5.20. Постройте график функции $|-x^2 + 1|$.

Домашнее задание

$\boxed{\textbf{I}}$

Задача 5.21. Найдите координаты вершин парабол а) $y = (x-2)^2-3$, б) $y = (x+1)^2+3$, в) $y = x^2 - 3$, г) $y = (x + 1)^2 + (x - 1)^2$.

Задача 5.22. Найдите координаты вершины параболы $y = x - 4x + 3$. Куда направлены её ветви. Исходя из этого, ответьте есть ли корни у уравнения $x - 4x + 3 = 0$.

Задача 5.23. Укажите координаты точки пересечения параболы $y = (x - 1)(x + 1)$ с осями координат.

Задача 5.24. Постройте табличку и нарисуйте график функции $y = x^2 + 2x$.

Задача 5.25. Парабола задается уравнением $y = x^2 + 2x - 3$. Найдите по формулам 5.2, 5.4 и 5.3 координаты вершины параболы и точки её пересечения с осями

Задача 5.26. Найдите x_1, x_2, y_1, x_0, y_0 для параболы $y = (x + 3)(x + 5)$.

Задача 5.27. Нарисуйте декартову систему координат и закрасьте кусочек, где $x^+2x < y$.

Задача 5.28. Парабола пересекает ось X в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Её вершина находится в точке $(x_0, y_0) = (1, -2)$. Напишите уравнение этой параболы.

$\boxed{\textbf{II}}$

Задача 5.29. Постройте график функции $y = (x + 1)(x + 5)$. Попробуйте это сделать, не раскрывая скобки.

Задача 5.30. Парабола $y = 0.5x^2 + c$ проходит через точку $M(2, 7)$. Найдите c, нарисуйте параболу и отметьте точку M.

Задача 5.31. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 \\ 2y - 3x = 9 \end{cases}$

Задача 5.32. Найдите наименьшее значение функции $x^2 + 6x + 5$.

Задача 5.33. Нарисуйте декартову систему координат и закрасьте кусочек, где $x^+2x < y$.

Задача 5.34. Коэффициент a параболы равен 0.5, её вершина есть точка $(1, 2)$. Нарисуйте эту параболу.

III

Задача 5.35. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 3x - 4 \\ 2y - 3x = 12 \end{cases}$

Задача 5.36. Известны корни квадатного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Известна также точка пересечения параболы $y = ax^2 + bx + c$ с осью OY — $y_1 = 5$. Восстановите это квадратное уравнение.

Задача 5.37. Нарисуйте декартову систему координат и закрасьте кусочек, где $x > y^2$ и $y > x^2$.

Задача 5.38. Нарисуйте декартову систему координат и закрасьте кусочек, где $x^2 + y^2 < 1$ и $y > x^2$.

Задача 5.39. Нарисуйте три параболы на одном графике: $y = x(x - a) + a$ для $a = 0$, $a = 2$ и $a = 4$.

Семинар 6

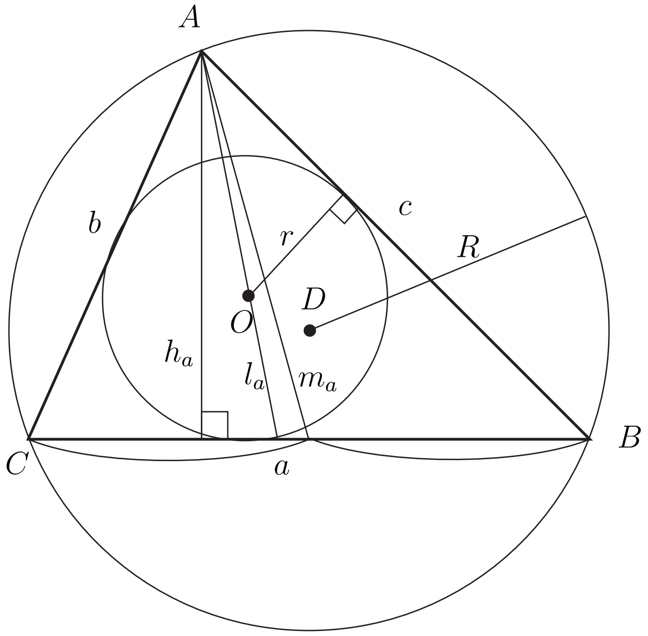
Геометрия
ВГЛУБЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

План занятия

- Формулы для площади треугольника
- Теорема синусов
- Радиус вписанной и описанной окружности
- Высота треугольника
- Формула Герона

Начало экспедиции вглубь треугольника

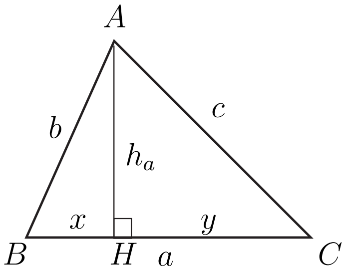
У треугольника кроме трех углов и трех сторон есть много чего ещё. Он неисчерпаем и щедр на красивые формулы и соотношения. И вряд ли найдется человек, который скажет, что он знает все про эту простейшую плоскую фигуру.



У каждого треугольника есть площадь, периметр, вписанная и описанная окружность, три высоты, три медианы, три серединных перпендикуляра, три биссектрисы.

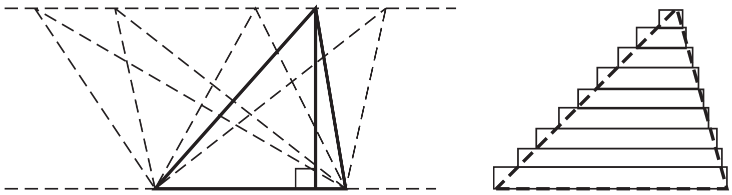
Вершины треугольника будем обозначать буквами A, B, C, а стороны, лежащие напротив этих углов маленькими буквами a, b, c. Высоты обозначаются буквами h с индексами. Например высота опущенная из вершины A на сторону a обозначается h_a. Медианы обозначаются буквой m: m_a, m_b, m_c; биссектрисы — буквой l: l_a, l_b, l_c. Радиус вписанной окружности записывается маленькой буквой r, радиус описанной — большой R. Точка O — центр вписанной окружности, а точка D — центр описанной окружности.

Первое с чего мы начнем нашу экспедицию вглубь треугольника – это его площадь. Как вы знаете площадь прямоугольного треугольника с катетами a b равна половинке площади прямоугольника со сторонами a, b. То есть $S_{\triangle} = \frac{ab}{2}$. Но любой треугольник можно разбить на два прямоугольных треугольника, и найти площадь как сумму их площадей:



$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABH} + S_{\triangle ACH},$$
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot h_a \cdot x + \frac{1}{2} \cdot h_a \cdot x =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot h_a \cdot (x + y) = \frac{1}{2} \cdot h_a \cdot a.$$

Как видите площадь можно вычислить зная лишь одну сторону и высоту опущенную на эту сторону. Это значит, что если мы будем двигать вершину треугольника по прямой параллельной основанию, то получим различные треугольники с одной и той же площадью. Треугольники как-будто слоистые: при движении вершины A эти слои смещаются, но общая площадь не меняется:



Следующий шаг: заметим, что высоту можно вычислить по формуле $h_a = b \sin C$ — здесь встречаются все три буквы треугольника. После подстановки в $S_{\triangle} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ получаем

$$\boxed{S_{\triangle} = \frac{1}{2} a \cdot b \sin C.} \tag{6.1}$$

В этой формуле встречаются все три буквы, и нетрудно догадаться до двух других формул для площади, вычисленных относительно других углов и сторон:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B.$$

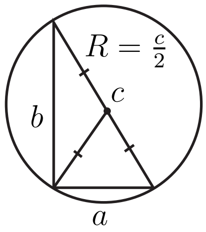
Если мы разделим это тождество на abc и умножим на 2, то получим теорему синусов:

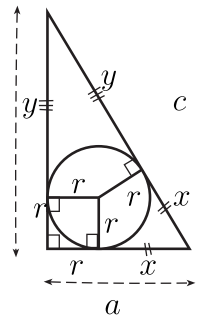
$$\boxed{\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}.} \tag{6.2}$$

Радиус вписанной и описанной окружности

Случай прямоугольного треугольника

Как вы помните в случае прямоугольного треугольника радиус описанной окружности просто равен половине гипотенузы $R = c/2$.





$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

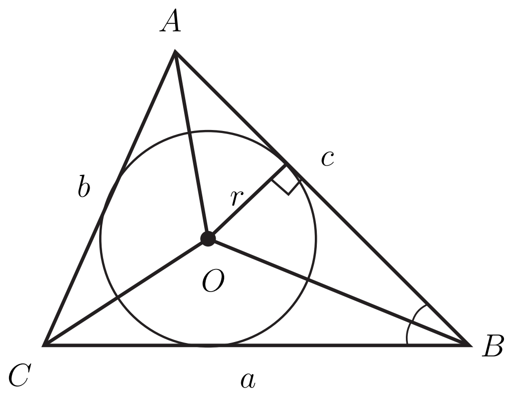
Радиус вписанной окружности вычисляется по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$. Вспомним, как получилась эта формула. Из рисунка видно, что $c = x + y$. Но $x = a - r$, $y = b - r$, и получается

$$c = a - r + b - r,$$

откуда нетрудно получить ответ.

Вписанная окружность

Впишем окружность в произвольный треугольник.



Вписанная окружность касается всех трех сторон треугольника в точках B_1, B_2, B_3. Причём, $AB_1 = AC_1$, $BA_1 = BC_1$, $CA_1 = CB_1$. Это мы разбирали в прошлом полугодии. Если мы проведем отрезки из вершин треугольника в центр окружности, то получим три треугольника. Точка O — общая вершина этих треугольников. Высоты всех этих треугольников равны r. Площадь всего треугольника можно записать как сумму площадей трех маленьких треугольников:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OBC} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle ABO},$$

что даёт

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot b \cdot r + \frac{1}{2} \cdot c \cdot r.$$

и после преобразования получается

$$\boxed{S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c) \cdot r = p \cdot r, \quad r = \frac{S_{\triangle}}{p}} \tag{6.3}$$

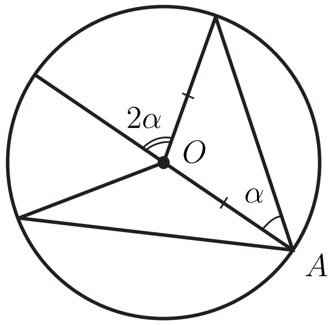
Таким образом, зная площадь треугольника и периметр, можно найти радиус вписанной окружности.

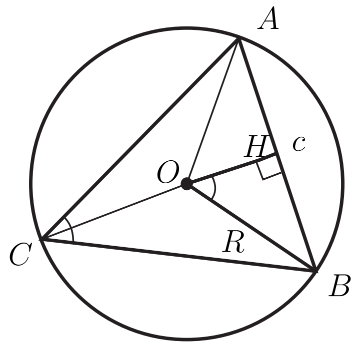
Описанная окружность.

Опишем вокруг произвольного треугольника окружность. Проведем из её центра отрезки в вершины треугольника. Снова получим разбиение треугольника на три маленьких. Рассмотрим один маленький треугольник. Например $\triangle OAB$. Этот треугольник равнобедренный — две его стороны равны радиусу окружности. Проведем в нем OH — биссектрису и высоту одновременно. Первое утверждение:

$$\angle AOB = \frac{1}{2}\angle ACB = \angle HOB.$$

То, что центральный угол в два раза больше чем центральный, мы проходили в прошлом семестре. Угол $\angle AOB$ — центральный, $\angle ACB$ — вписанный. Равенство $\frac{1}{2}\angle ACB = \angle HOB$ следует из того, что OH биссектриса.





$$BO \cdot \sin\angle HOB = BH = \frac{AB}{2}.$$

$$R \cdot \sin C = \frac{c}{2}$$

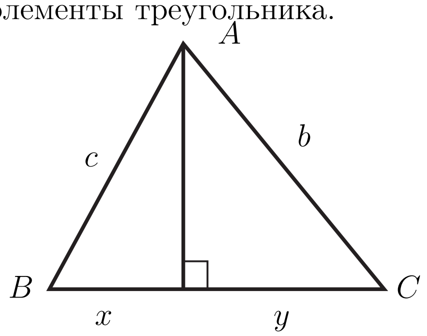
$$\boxed{R = \frac{c}{2\sin C}}$$

И теперь мы можем дополнить нашу теорему синусов:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{1}{2R}. \qquad (6.4)$$

Высота треугольника

Итак, перед нами треугольник. Известны его стороны a, b и c. Стороны треугольника однозначно задают треугольник (вспомните признак равенства треугольников по трем сторонам). А значит, зная только три стороны треугольника, можно найти все остальные элементы треугольника.



Пусть основание высоты h_a делит отрезок a на два отрезка длины x и y. Запишем теорему Пифагора для двух получившихся прямоугольных треугольников:

$$\textbf{I}.\ \ c^2 + x^2 = h_a^2,$$

$$\textbf{II}.\ \ b^2 + y^2 = h_a^2.$$

$$\textbf{III}.\ \ x + y = a.$$

Заметьте, что у нас три уравнения и три неизвестных: x, y, h_a. Значит система должна решиться. Нам нужно найти h_a выраженную через a, b, c, так чтобы не было x и y. Поступим так: из первого уравнения вычтем второе:

$$c^2 - b^2 + x^2 - y^2 = 0, \quad x^2 - y^2 = b^2 - c^2,$$

$$(x-y)(x+y) = b^2 - c^2.$$

Но уравнение **III** дает $x + y = a$, поэтому

$$\textbf{IV}.\ \ x - y = \frac{b^2 - c^2}{a}.$$

Если мы сложим $(x + y)$ и $(x - y)$, то получим $2x$, значит **III**+**IV** даст

$$2x = \frac{b^2 - c^2}{a} + a = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{a}.$$

$$x = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}.$$

Теперь нужно подставить этот x в уравнение **I**. Попробуйте сами повозиться с этими тремя уравнениями и найти h_a. Если вы без ошибок доведете вычисления до конца, то получите

$$\boxed{h_a^2 = \frac{(b^2 + a^2 - c^2)^2 + 4a^2c^2}{4a^2}} \qquad (6.5)$$

Пусть эта формула несколько большая, её не обязательно запоминать. Кроме того, её можно привести к более компактному виду.

Конец экспедиции — формула Герона

К более компактному виду выражение для высоты h_a привел Герон. Он нашел, что

$$h_a^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}.$$

Здесь $p = (a+b+c)/2$, то есть половина периметра. Подставив это выражение в $S^2 = \frac{1}{4}h_a^2a^2$, Герон получил свою знаменитую формулу для квадрата площади треугольника:

$$\boxed{S_\triangle^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).} \qquad (6.6)$$

Эта формула по трем сторонам треугольника позволяет найти его площадь. Пример: $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, тогда

$$p = (3 + 4 + 5)/2 = 6,$$

$$(p - a) = 3,$$
$$(p - b) = 2,$$
$$(p - c) = 1,$$

$$S^2 = 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36.$$

Ответ: $S = 6$, что легко вычислить без формулы Герона, поскольку данный треугольник прямоугольный.

Наша экспедиция вглубь треугольника подходит к концу. Надо подводить итоги. Конечно, у нас еще много нерешённых задач, вы сами их легко можете придумать. Например: даны радиусы вписанной и описанной окружности, а также периметр треугольника, найдите его стороны. Ещё не знаем формул для длины биссектрисы и медианы, не умеем находить координаты точки пересечения высот, биссектрис и серединных перпендикуляров.

Надеемся, что занимаясь в Физтех-Колледже вы со временем хорошо узнаете эту наипростейшую плоскую фигуру — треугольник.

Ключевые задачи

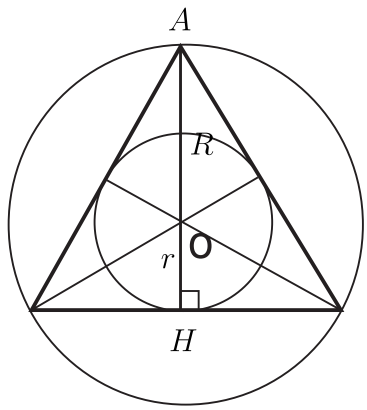
Задача 6.1. У треугольника $a = 4$, $b = 5$, а угол $\angle C = 30°$. Найдите площадь треугольника.
Решение. Используем формулу 6.1. $S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}$. Ответ: $S\_\triangle = 5$.

Задача 6.2. У треугольника $a = 4$, и $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$. Найдите сторону b.
Решение. По теореме синусов $\dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin A}{a}$, откуда по правилу пропорций $a\sin B = b\sin A$, $\Rightarrow$

$$b = (a\sin B)/\sin A = (4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}})/\frac{1}{2} = \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

Ответ: $b = 4\sqrt{2}$.

Задача 6.3. Найдите радиус r окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной 1, и радиус R окружности, описанной около него.



Решение. (Первый способ.) В правильном треугольнике биссектрисы, медианы и высоты совпадают. Учитывая, что медианы в точке пересечения делятся $1 : 2$, то отрезок OH есть треть медианы AH. Радиус вписанной окружности равен третьей части медианы, то есть

$$r = \frac{1}{3}(\sqrt{3}/2) = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

а радиус описанной окружности — двум третьим медианы:

$$R = \frac{2}{3}(\sqrt{3}/2) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

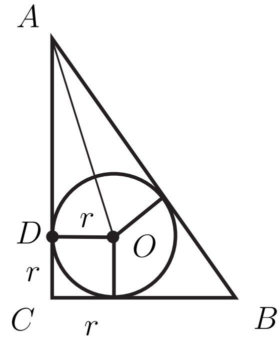
Решение. (Второй способ.) Площадь правильного треугольника со стороной 1 равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Периметр равен 3. Из формулы (6.3) находим

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{3}/4}{3/2} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Радиус описанной окружности найдем по формуле (6.4):

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{1}{2\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

■



Задача 6.4. Найдите синус $15°$.
Решение. Построим прямоугольный треугольник с углом $\angle A = 30°$. Если мы впишем в него окружность, то угол $\angle DAO$ как раз будет $15°$. Пусть гипотенуза $AB = 1$, тогда $CB = 1/2$, $CA = \sqrt{3}/2$. Радиус вписанной окружности

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{1/2+\sqrt{3}/2-1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}.$$

Теперь мы можем вычислить стороны прямоугольного треугольника $\triangle AOD$. Зная стороны, найдем синус угла $\sin\angle DAO = \sin 15° = \frac{DO}{AO}$.

$$DO = r,$$

$$AD = AC - r = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}.$$

$$AO = \sqrt{AD^2 + DO^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}\right)^2}.$$

После вычислений найдем

$$AO = \sqrt{2\frac{3}{16} + 2\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\sin 15° = DO/AO = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Задача 6.5. Найдите радиус вписанной окружности в равнобедренном треугольнике с углом $\angle C = 30°$ при вершине и боковыми сторонами $CA = CB = 5$.
Решение. План такой, находим основание треугольника, его периметр и площадь. По формуле $r = S/p$ (p — полупериметр) найдем r.

$CA = b$, $CB = a$. По формуле $S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin C$ находим

$$S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\frac{1}{2} = \frac{25}{4}.$$

Половинка основания, отрезок AH, является катетом в прямоугольном треугольнике $\triangle ACH$. Острый угол в этом треугольнике $\angle ACH = 15°$. Значит

$$AH = AC\sin 15° = 5\sin 15°,$$

$$AB = 2AH = 10\sin 15°.$$

Сейчас мы готовы вычислить полупериметр:

$$p = \frac{AB+BC+AC}{2} = \frac{10\sin 15° + 5 + 5}{2} = 5\sin 15° + 5.$$

Находим r:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{25/4}{5\sin 15° + 5},$$

$$r = \frac{5}{4\sin 15^\circ + 4}.$$

Ответ можно оставит в таком виде. Величина $\sin 15^\circ$ полноправное число, как число $\sqrt{2}$ или 3^6.

Давайте подставим значение $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, которое мы получили в предыдущей задачке. Сначала умножим и числитель и знаменатель в выражении $sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ на $\sqrt{2}$. Получим

$$sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

и в таком виде подставим в выражение для r:

$$r = \frac{5}{4\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+4} = \frac{5}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+4}.$$

Итак Ответ: $\dfrac{2(25/4)}{5+5+\sin 15^\circ} = \dfrac{5}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+4} =\approx 0.992994$

Здесь мы случайно столкнулись с интересной но сложной задачей:

Задача 6.6. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе $\frac{5}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+4}$

Задачи для решения в классе

Задача 6.7. В правильном треугольнике ABC со стороной 1 проведена высота AH. В получившемся треугольнике AHB проведена высота HH_1. В треугольнике HH_1B проведена высота H_1H_2, точка H_2 лежит на HB. Найдите H_1H_2, все стороны треугольника HH_1B, а также радиус вписанной в него окружности.

Задача 6.8. Докажите, что $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$

Задача 6.9. Найдите радиус вписанной и описанной окружности для треугольника со сторонами 7, 5, 5.

Задача 6.10. Посмотрите на формулы

$$2R\sin C = c,$$

$$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

Используя их, выразите радиус описанной окружности через площадь и стороны треугольника.

Ответ:

$$R = \frac{abc}{4S} \tag{6.7}$$

Домашнее задание

I

Задача 6.11. Найдите периметр прямоугольного треугольника с катетами $a = 12$, $b = 5$.

Задача 6.12. Чему равен радиус вписанной окружности в треугольнике из предыдущей задачи?

Задача 6.13. Чему равен радиус описанной окружности в прямоугольном треугольнике с катетами $a = b = 1$?

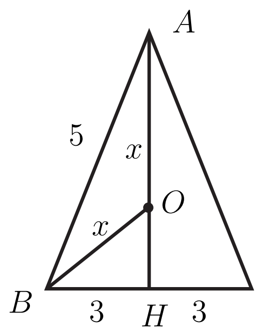
Задача 6.14. Треугольник задан своими вершинами: $A(2, 1)$, $B(-2, 1)$, $C(0, -3)$. Найдите длины его сторон и длину высоты h_c.

Задача 6.15. Известна сторона и синус противолежащего угла $a = 1$, $\sin\alpha = 1/3$. Найдите радиус описанной окружности R.

Задача 6.16. Найдите стороны, высоту h_c, площадь и радиус вписанной окружности треугольника $\triangle ABC$, если $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(3, 4)$. А для начала нарисуйте треугольник на плоскости с декартовой системой координат.

II

Задача 6.17. Найдите радиус окружности вписанной в треугольник $\triangle ABC$ из предыдущей задачи.



Задача 6.18. Дан равнобедренный треугольник со сторонами 5, 5, 6. Найдите радиус описанной окружности.

Подсказка. Можно составить уравнение на x (см. рисунок). Для этого запишите теорему Пифагора для $\triangle OBH$.

Задача 6.19. Найдите радиус вписанной окружности для треугольника со сторонами 5, 5, 6.

Задача 6.20. Треугольник задан своими вершинами: $A(1, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(-2, -1)$. Найдите длины его сторон, площадь и радиус описанной окружности.

Подсказка. Используйте формулы Герона (6.6) и (6.7).

Задача 6.21. $a = 5$, $b = 4$, $c = 7$. $S = ?$, $r = ?$.

Задача 6.22. Треугольник задан своими вершинами: $A(1, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(-2, -1)$. Найдите медиану m_c опущенную из вершины C на сторону AB.

Подсказка. Напомним, что координата x середины отрезка есть среднее арифметическое координат x концов отрезка, и то же самое для y (см. страницу 19).

Задача 6.23. Используя формулу Герона найдите площадь треугольника со сторонами 2, 3, 6.

III

Задача 6.24. Равнобедренный треугольник имеет стороны a, a и b. Найдите r и R — радиус вписанной и описанной окружности.

Задача 6.25. По аналогии с задачей 6.4 найдите синус $\sin(45/2)^\circ$. Вопрос со звездочкой: Какова общая формула зависимости $\sin(\alpha/2)$ от $\sin\alpha$?

Задача 6.26. Радиус описанной окружности равен $R = 10$, известны стороны $c = 10$, $b = 6$. Найдите третью сторону треугольника.

Задача 6.27. Найдите высоту h_a в треугольнике $a = 6$, $b = 3$, $c = 4$.

Задача 6.28. Найдите высоту h_a в треугольнике, считая, что известны все стороны треугольника, a, b и c.

Семинар 7

Геометрия
ДВИЖЕНИЕ — ЖИЗНЬ

План занятия

- Определение понятия движение.
- Свойства движения
- Виды движений
    - Параллельный перенос.
    - Поворот.
    - Центральная симметрия.
    - Осевая симметрия.

Основные определения и соотношения

Нарисуйте на столе систему координат. Положите на него кальку и на кальке нарисуйте свою любимую фигуру. Каждая точка вашей фигуры имеет определенные координаты в нарисованной на столе системе координат. А теперь возьмите и передвиньте кальку — каждая точка фигуры получит новые координаты. Если вы не поворачивали кальку а только двигали в каком-либо направлении, то преобразование называется параллельным переносом. Если вы повернули кальку на какой-то угол сохраняя точку O неподвижной, то преобразование называется поворотом вокруг точки O (относительно точки O) на угол α.

Поворот и параллельный перенос есть примеры движения. Движение — это такое преобразование плоскости, которое сохраняет расстояние между любой парой точек. Если мы применим движение к какой либо фигуре, то форма фигуры (взаимное расположение её точек) останется прежним, изменится лишь положение фигуры на плоскости.

Если мы возьмем кальку со стола, повертим её по разному, возможно, перевернем другой стороной, сдвинем в сторону ... а потом опять вернем на стол, то мы получим движение. Движение — это все преобразования, которые можно получить применяя повороты, параллельные сдвиги и переворачивания кальки. Последнее предложение обычно считается теоремой, которую нужно доказывать, но можно считать и определением.

Таким образом,

!

ДВИЖЕНИЕ — это
1) все, что можно получить двигая, вращая и переворачивая плоскость(кальку на столе)
2) преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между любыми двумя точками.

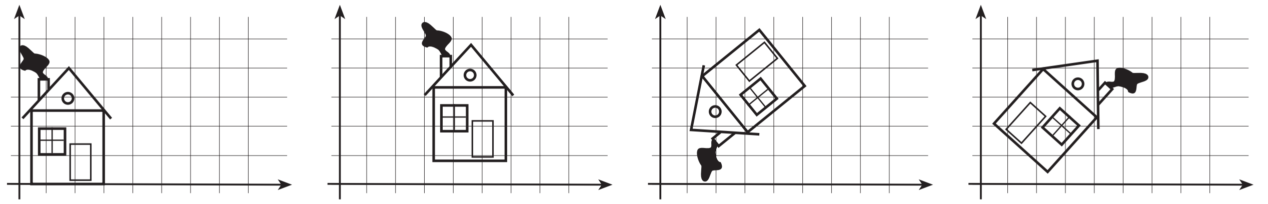


Рис. 7.1: Примеры движения.
На первом рисунке домик в своем исходном положении. На втором рисунке его сдвинули (применили к нему параллельный перенос), на третьем его еще и повернули, а на четвертом рисунке применили симметрию относительно прямой, то есть перевернули кальку.

Таким образом, можно двумя способами определить понятие движения. Они эквивалентны. Подумайте почему.

Итак движение — это преобразование плоскости, сохраняющее расстояния. Но прежде, чем пользоваться этим, вторым определением движения, необходимо уяснить что такое преобразование плоскости. Преобразование — это то, что мы могли бы сделать с калькой если бы она была резиновая и мы могли бы растягивать или сжимать её в разных местах по-разному. То, что обычно понимается под словом “преобразование”, примерно соответствует математическому содержанию этого понятия. Каждая точка при преобразовании получает новое место жительство — становится другой точкой плоскости. Если A перешла в A', то A' называется образом точки A при данном преобразовании. А точка A является прообразом точки A'.

Свойства движения

Кроме расстояния движение сохраняет много чего еще. В частности форму фигур.

При движении

a) Сохраняются расстояния: $A \to A'$, $B \to B'$, $\Rightarrow |AB| = |A'B'|$.

b) Разные точки переходят в разные: $A \to A'$, $B \to B'$, $A \neq B \Leftrightarrow A' \neq B'$.

c) Прямые переходят в прямые: $l \to l'$, отрезки — в отрезки: $AB \to A'B'$.

d) Точки, лежащие на одной прямой, переходят в точки лежащие на одной прямой; Причем сохраняется порядок их взаимного расположения. То есть, если точки A, B и C лежали на одной прямой и B лежала между A и C, то их образы A', B', C' тоже лежат на одной прямой и B' лежит между A' и C'.

e) Параллельные прямые переходят в параллельные, а пересекающиеся в пересекающиеся.

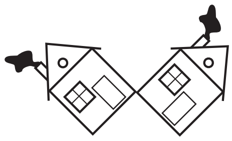
f) Сохраняются углы между прямыми.

g) Треугольники, квадраты и другие фигуры переходят в равные им фигуры.

Свойство *a*) есть просто определение. Свойство *b*) следует непосредственно из а). Прямая линия представляет собой множество кратчайших путей между своими точками, расстояния при движении сохраняются значит и свойство кратчайшего расстояния тоже должно сохранятся. Прямая должна перейти в некоторую линию, по которой двигаться всего короче — это прямая. Несложно понять откуда берутся остальные свойства.

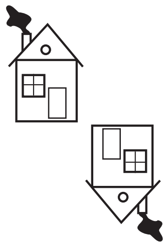
Движение сохраняет практически все, зато мало может. В дополнении рассказано об аффинных преобразованиях, которые не сохраняют расстояния, а сохраняют лишь прямые и свойство параллельности. Аффинные преобразования уже кое что могут, в частности, они могут любой треугольник преобразовать в любой другой.

Виды движений



1. Поворот. Поворот характеризуется точкой поворота (вокруг которой осуществляется поворот) и величиной поворота (на сколько градусов).

2. Параллельный перенос. Паралельный перенос характеризуется направлением (в каком направлении мы двигали кальку) и на какое расстояние. Любой параллельный перенос можно осуществить в два этапа: сначала двигаем в горизонтальном направлении (параллельно оси X) на расстояние x, а потом в вертикальном (параллельно оси Y) на расстояние y. Числа x и y надо брать со знаком минус, если движение происходило против направления оси. Таким образом, любому перенос соответствует два числа (x, y) или вектор $\overrightarrow{a}(x, y)$. О векторах мы с вами поговорим на следующем семинаре. Чтобы найти A' – образ точки A, нужно от точки A отложить вектор $\overrightarrow{a}$, конец этого вектора и будет указывать на A'.



3. Центральная симметрия. При центральной симметрии выбирается точка — центр симметрии. В нашем случае центром симметрии является угол дома. Образ точки A при центральной симметрии относительно точки O есть точка A', лежащая на прямой OA на том же расстоянии от точки O, что и точка A, только с другой стороны. То есть

> **!** Точки A и A' симметричны относительно точки O, если точка O является серединой отрезка AA'.

Центральная симметрия — это отражение в точке. Вот два домика. Каждый из них можно получить из другого при помощи центральной симметрии. центральную симметрию относительно угла. Центральная симметрия то же самое что и поворот на 180° градусов.

4. Осевая симметрия. Это симметрия относительно прямой (отражение в прямой). Образ точки A находится на том же расстоянии от прямой l что и сама точка, только с другой стороны. Рисунок справа обладает осевой симметрией. Каждый из домиков можно получить из другого применив симметрию относительно прямой, которая их разделяет.

> **!** Точки A и A' симметричны относительно прямой l, если середина отрезка AA' лежит на прямой l и отрезок AA' перпендикулярен этой прямой.

Итак, все вышеперечисленные преобразования плоскости являются движениями.

Понятия группы движений или каких либо преобразований, а также понятие симметрии сегодня являются важнейшими понятиями физики. Понятие симметрии часто облегчает понимание задачи, помогает выявить некие закономерности, делающие решение задачи более простым.

Ключевые задачи

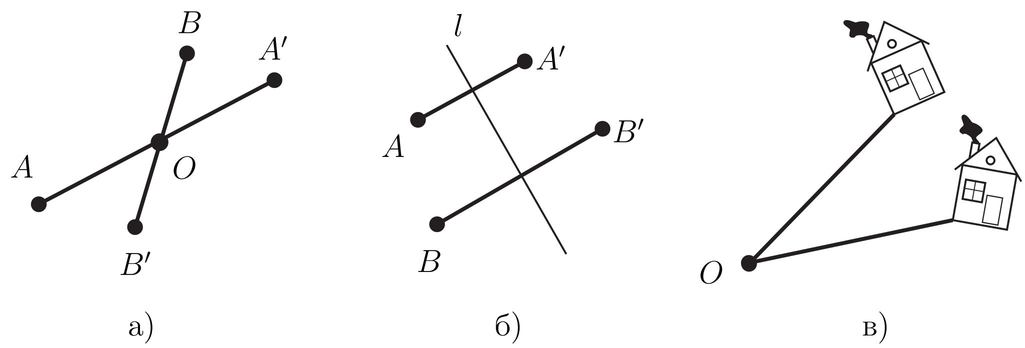
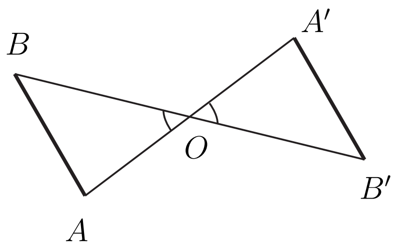


Рис. 7.2: Примеры движений: а) центральная симметрия, б) осевая симметрия, в) поворот.

Задача 7.1. Докажите, что если точки A' и B' симметричны точкам A, B относительно некоторой точки O, то отрезки AB и $A'B'$ равны и параллельны.



Решение. Рассмотрим два треугольника $\triangle AOB$ и $\triangle A'OB'$. Докажем, что они равны. Действительно, по определению симметрии O есть середина отрезка AA' и поэтому $AO = OA'$. Аналогично $BO = OB'$. У этих треугольников равные углы $\angle AOB = \angle A'OB'$. Значит эти треугольники равны. В равных треугольниках соответствующие стороны равны. В частности $AB = A'B'$. Доказали первое.

Далее можно показать, что треугольники $\triangle AOB'$ и $\triangle A'OB$ тоже равны и получить, что $AB' = A'B$. Таким образом, $ABA'B'$ параллелограмм, так как у него противоположные стороны равны. Значит $AB \parallel A'B'$. ■

Задача 7.2. Чему равны координаты точки A', которая симметрична точке $A(2, 1)$ относительно начала координат $O(0, 0)$.

Ответ: $A'(-2, -1)$. Эта точка лежит на прямой OA и удалена от O на такое же расстояние, что и точка A. Точка O должна быть серединой отрезка AA'. Поэтому, лучший способ проверить, что $A(x_1, y_1)$ симметрична $A'(x_2, y_2)$ относительно точки $O(x_0, y_0)$ — это проверить соотношения

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

В нашем случае $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_1 = 2$, $y_1 = 1$, $x_2 = -2$, $y_2 = -1$. В общем, если симметрия делается относительно начала координат, то надо просто поставить минус: $x2 = -x1$, $y_2 = -y_1$.

Задача 7.3. Чему равны координаты точки A', которая симметрична точке $A(2, 1)$ относительно оси OX.

Решение. Лучший способ решить эту задачу — нарисовать и посмотреть. Точка A находится сверху, над осью OX, точка A' находится под осью OX, на той же вертикали и на том же расстоянии от оси OX, что и точка A.

Задача 7.4 На сторонах квадрата $ABCD$ отложили точки A_1, B_1, C_1, D_1, так что $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ квадрат.

Решение. Вы легко докажите это утверждение в два этапа: 1) стороны $A_1B_1C_1D_1$ попарно равны, и 2) углы $A_1B_1C_1D_1$ попарно равны. Эти два утверждения доказываются с через равенство разных треугольников.

Давайте докажем, что $A_1B_1C_1D_1$ квадрат, методом движений. А именно — квадрат $ABCD$ имеет центр симметрии, все его четыре вершины равносильны и переходят друг в друга при поворотах на 90°, 180° или 270° вокруг центра квадрата. Кроме того квадрат центрально-симметричная фигура. Ни одна вершина квадрата ничем не лучше другой. Но то же самое мы можем сказать про вершины A_1, B_1, C_1, D_1 — все они построены по одному и тому же правилу на сторонах квадрата $ABCD$. Значит фигура $A_1B_1C_1D_1$ тоже должна быть центрально-симметричной и переходить в себя при поворотах на 90°, 180° или 270° вокруг точки O. Единственный четрырехугольник, обладающий таким свойством, это квадрат. Впрочем это тоже нужно доказать.

Все эти рассуждения профессиональные математики имеют право упускать, а говорить просто

"Из соображений симметрии фигура $A_1B_1C_1D_1$ есть квадрат."

Нет никаких причин для углов и сторон четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ быть разными. Поэтому они равны

Задача 7.5 Даны точки A, B, C, D и O. Известно что при повороте на 90° вокруг точки O точка A переходит в точку B, B в C, C в D, D в A. Докажите, что эта фигура квадрат.

Решение. Точка O при повороте вокруг точки O остается самой собой, $A \to B$. Значит $OA = OB$ и угол между отрезками равен 90°. Тоже самое про пары отрезков OB и OC, OC и OD, OD и OA. Значит все эти отрезки равны между собой и углы между ними кратны 90°. Треугольник $\triangle OAB$ равнобедренный с углом при вершине в 90°. Значит два других угла равны 45°. То же самое можно сказать про треугольники $\triangle OBC$, $\triangle OCD$, $\triangle ODA$. Все эти треугольники равны между собой. Значит все стороны $ABCD$ равны между собой, а все его углы равны $45° + 45° = 90°$. Все углы равны и все стороны равны — значит это квадрат. ■

Задачи для решения в классе

Задача 7.6. Есть ли у рисунка домика а) центр симметрии, б) ось симметрии? Что нужно сделать с рисунком домика, чтобы у него появилась ось симметрии?

Задача 7.7 Докажите, что при повороте правильного треугольника вокруг точки пересечения медиан на 60° он переходит сам в себя.

Задача 7.8. Есть ли центр симметрии у равнобедренного треугольника со сторонами 5, 5, 6? А у правильного треугольника? А у квадрата? Есть ли оси симметрии у этих трех фигур?

Задача 7.9. Постарайтесь перечислить все оси симметрии квадрата. Сколько осей симметрии у окружности?

Задача 7.10. Есть ли ось симметрии у сектора окружности?

Задача 7.11. Докажите, что у параллелограмма точка пересечения диагоналей является центром симметрии.

Задача 7.12. У каких треугольников есть центр симметрии?

Задача 7.13. Докажите, что если у треугольника есть оси симметрии, то она проходит через одну из его вершин, а треугольник является равнобедренным.

Движение и декартовы координаты

Задача 7.14. Чему равны координаты точки A' которая симметрична точке $A(3,4)$ относительно начала координат $O(0,0)$?

Задача 7.15. Чему равны координаты точки A' которая симметрична точке $A(3,4)$ относительно точки $B(1,-1)$?

Задача 7.16. Чему равны координаты точки A' которая симметрична точке $A(3,4)$ относительно прямой $x = 1$?

Задача 7.17. Докажите, что диагонали квадрата являются осями симметрии квадрата.

Задача 7.18. При симметрии относительно некоторой точки точка A переходит в точку A'. Постройте точку, в которою при этой симметрии переходит точка D (см. рисунок 7.3).

Задача 7.19. При симметрии относительно некоторой прямой точка A переходит в точку A'. Постройте точку, в которую при этой симметрии переходит точка D (см. рисунок 7.3).

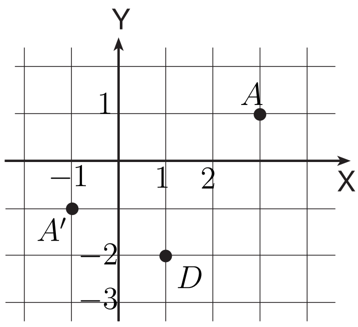


Рис. 7.3.

Задача 7.20. При некотором параллельном переносе точка A перешла в точку A'. Постройте точку, в которую этот параллельный перенос переведет точку D (см. рисунок 7.3).

Задача 7.21. Постройте фигуру, в которую переходит отрезок AB, $A(2,1)$, $B(3,1)$, при повороте около точки $O(0,0)$ на угол $90°$ по часовой стрелке.

Задача 7.22. Дан квадрат $ABCD$. Известны координаты его вершин: $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(3,3)$, $D(0,3)$. Поверните его на угол $90°$ против часовой стрелки относительно точки $S(1,1)$. Найдите новые координаты его вершин.

Построение циркулем и линейкой

Задача 7.23. Дана точка O и прямая l. Как с помощью циркуля и линейки повернуть эту прямую на $60°$ по часовой стрелке вокруг O?

Подсказка. . Расстояние от O до новой прямой l' (образа прямой l) такое же, что и до прямой l. Нарисуйте отрезки кратчайших расстояний и проведите анализ.

Задача 7.24. Даны точки A и O. Постройте с помощью циркуля и линейки точку A' симметричную A относительно O.

Задача 7.25. Дана точка A и прямая l. Постройте с помощью циркуля и линейки точку A' симметричную A относительно прямой l.

Задача 7.26. Даны прямая l и точки A и B, лежащие по одну сторону от неё. Найдите с помощью циркуля и линейки на прямой l точку C такую, что что сумма расстояний $AC + CB$ имеет наименьшее значение.

Задача 7.27. Даны две пересекающиеся прямые и точка O не лежащая на них. Постройте отрезок с концами на этих прямых и серединой O.

Подсказка. Симметрично отразите одну прямую относительно точки O.

Задача 7.28. Дан угол и точка O внутри него. Найдите с помощью циркуля и линейки две точки A и B, лежащие на разных сторонах угла, такие, что OAB есть правильный треугольник. Сколько есть решений?

Подсказка. Симметрично отразите одну сторону угла относительно точки O.

Домашнее задание

I

Задача 7.29. Чему равны координаты точки A' которая симметрична точке $A(-4, -4)$ относительно точки $B(-1, 2)$?

Задача 7.30. Чему равны координаты точки A' которая симметрична точке $A(2, 2)$ относительно прямой $y = -1$?

Задача 7.31. Параллельный перенос задаётся формулами $x' = x + 3$, $y' = y - 1$. В какие точки при этом параллельном переносе переходят точки $A(1, 3)$, $O(0, 0)$, B(-4,-4)? Нарисуйте декартову систему координат, отметьте точки и их образы.

Задача 7.32. Найдите координаты образа точки $A(2, 4)$ при центральной симметрии относительно $S(1, 2)$.

Задача 7.33. К правильному треугольник $\triangle ABC$ применили осевую симметрию относительно оси AA_1, где A_1 — середина стороны BC, а потом относительно оси BB_1, где B_1 — середина стороны AC. Где в конечном счете оказалась вершина C?

Задача 7.34. Дан отрезок AB и прямая l. Постройте с помощью циркуля и линейки отрезок $A'B'$ симметричный AB относительно прямой l. Найдите точку пересечения прямых AB и $A'B'$.

Задача 7.35. Даны точки $A(0,3)$, $B(5,6)$ Найдите точку C (укажите её координаты) на оси OX, такую что сумма расстояний $AC+CB$ минимально.

Задача 7.36. Постройте отрезок, в который переходит отрезок AB, $A(-1,-1)$, $C(2,-1)$, при повороте около точки $O(0,0)$ на угол $90°$ по часовой стрелке. Укажите координаты его концов.

Задача 7.37. Куда убежит квадратик с вершинами $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $D(1,0)$, если последовательно применить симметрию относительно AB, потом относительно BC, потом CD и DA? Нарисуйте его состояние после каждой операции.

II

Задача 7.38. Чему равны координаты точки A' которая симметрична точке $A(-100,100)$ относительно точки $B(-3,2)$?

Задача 7.39. Покажите, что если четырехугольник центрально-симметричен, то он параллелограмм. На основе этого докажите, что центры сторон любого параллелограмма образую параллелограмм.

Задача 7.40. Докажите, что четырехугольник, у которого есть центр симметрии, является параллелограммом.

Задача 7.41. Дан отрезок AB и его образ $A'B'$ при повороте вокруг некоторой точки. Найти с помощью циркуля и линейки точку, вокруг которой был совершен поворот.

Задача 7.42. Докажите, что если у треугольника есть две разные оси симметрии, то есть и третья.

III

Задача 7.43. Правильный треугольник $\triangle ABC$ повернули на $60°$ по часовой стрелке, потом сделали центральную симметрию, а потом снова повернули на $60°$ по часовой стрелке, и снова сделали центральную симметрию. Все операции осуществлялись относительно центра треугольника. Укажите где оказалась вершина A в конце. А вершина B?

Задача 7.44. В треугольник вписали окружность и отметили точки касания окружности и сторон треугольника. Затем стерли треугольник, осталось лишь окружность с помеченными на ней точками. Восстановите с помощью циркуля и линейки треугольник.

Задача 7.45. Даны острый угол и точка O внутри него. Используя осевую симметрию, найдите на сторонах данного угла такие точки A и B, чтобы треугольник $\triangle OAB$ имел наименьший периметр.

Задача 7.46. Даны три попарно пересекающиеся прямые a, b, c. Как построить отрезок, перпендикулярный прямой a, с серединой на прямой b и концами на прямых a и c? Всегда ли задача имеет решение?

Задача 7.47. При данном движении каждая из вершин треугольника отображается на себя. Докажите, что любая точка плоскости отображается на себя.

Семинар 8

Алгебра
СТЕПЕНЬ ЧИСЛА

План занятия

- Сколько монет должен был Поликрат Пифагору?
- Игра "Угадай число"
- Пять правил

Сколько монет должен был Поликрат Пифагору?

Как-то поспорил Поликрат с Пифагором на то, кто кого выиграет в шахматы. Пифагор выиграл его и говорит: "Я тебя выйграл и ты мне дашь за это золото. А именно, на первую клетку шахматной доски положишь одну монету, на вторую две монеты, на третью четыре монеты, на пятую восе..." — "Понял, понял, хватит!" – перебил его Поликрат. – "Получишь ты своё золото!". Но Поликрат не смог выполнить своё обещание. Почему?

Давайте подумаем вместе. Всего на шахматной доске $8 \times 8 = 64$ клетки. Пифагор имел ввиду, что на каждой следующей клетке число монет должно быть в два раза больше, чем в предыдущей. Если на первой лежит одна монета, то сколько монет должен положить Поликрат на последнюю, 64-ую клетку.

Для этого нам нужно найти число 2^{63} — два в 63 степени, то есть 63 перемноженные двойки. Посмотрим на первые степени двойки.

$$2^1 = 2, \quad 2^2 = 2 \cdot 2 = 4, \quad 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16, 2^5 = 32.$$

□
□□
□□□□
□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□
Седьмая строчка уже не влазит в ширину странички.

Задача 8.1. Найдите чему равно 2^{10} (число квадратиков в 11-ой строчке).

Если вы не поленитесь, то найдете Ответ: : 1024.

То есть примерно 1000. 2^{20} — это двадцать двоек, два раза по десять двоек, что примерно равно $1000 \times 1000 = 1000000$.

Число 2^{63} в восемь раз больше чем 2^{60}, а последнее число примерно равно

$$2^{60} = (2^{10})^6 \approx (1000)^6 = 10^{18}.$$

То есть $2^{63} \approx 800000...0$ — цифра 8 и восемнадцать нулей. Это очень большое число, такого количества монет у Поликрата просто не было и не могло быть. С помощью вычислительных машин мы можем найти точное значение:

$$2^{63} = 9223372036854775808.$$

Но Поликрат должен был Пифагору не 2^{63} монет, а $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$.

Сколько именно монет должен был Поликрат Пифагору. Складывать 64 числа, к тому же таких больших, довольно кропотливая работа. Давайте посмотрим на такие суммы:

$$\begin{aligned}
&1 = 1\\
&1 + 2 = 3\\
&1 + 2 + 4 = 7\\
&1 + 2 + 4 + 8 = 15\\
&1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31\\
&1 + 2 + \ldots + 32 = 63
\end{aligned}$$

Как видите, сумма первых степеней двойки равно следующей степени двойки минус 1, а значит, Поликрат пообещал отдать Пифагору $2^{64} - 1 = 18446744073709551615$ монет.

Игра “Угадай число”

Игра 8.1 *Ведущий загадывает натуральное число от* 1 *до* N. *Остальные играющие задают ему вопросы, на которые можно ответить либо “да”, либо “нет”. Нужно угадать число, задав как можно меньше вопросов.*

Можно, например, задавать такие вопросы: “Верно ли, что это число 27?”, “Загаданное число меньше 50?”, “Загаданное число чётное?”.

Задача 8.2 Поиграйте друг с другом в эту игру. Сколько вопросов требуется для угадывания одного из первых десяти натуральных чисел ($x \in \{1, 2, \ldots, 10\}$)?

Подсказка. Решите эту задачу для случаев, когда загаданное число $x \in \{1, 2\}$, $x \in \{1, 2, 3, 4\}$, $x \in \{1, 2, \ldots, 8\}$.

Решение. Если нужно угадать из двух чисел, то одного вопроса достаточно. Для трех чисел необходимо уже два вопроса. Например мы спрашиваем: “Это либо 1 или 2, но не 3?”. Если нам отвечают “Да”, то нужно задать ещё один вопрос “Верно ли, что $x = 1$?”. Получив ответ на этот вопрос, мы будем знать загаданное число.

Если загадано одно из первых 4 натуральных чисел, то необходимо задать два вопроса. А для $N = 5$ вариантов двух вопросов уже не хватит.

Решим эту задачу для случая $x \in \{1, 2, \ldots, 16\}$. Первый вопрос: “Верно ли, что загаданное число лежит справа от вертикальной палочки?”:

1 2 3 4 5 6 7 8 | 9 10 11 12 13 14 15 16

После ответа на этот вопрос, мы будем знать, в какой половине находится загаданное число. Пусть слева. Тогда второй вопрос: "Верно ли, что загаданное число лежит справа от вертикальной палочки между 4 и 5?"

$$1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8 \mid 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16$$

Иначе (если справа от 8) второй вопрос будет таким: "Верно ли, что загаданное число лежит справа от вертикальной палочки между 12 и 13?"

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \mid 9\ 10\ 11\ 12 \mid 13\ 14\ 15\ 16$$

В любом случае, после второго вопроса мы будем наверняка знать в какой из четырех частей лежит загаданное число:

$$1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8 \mid 9\ 10\ 11\ 12 \mid 13\ 14\ 15\ 16$$

Эту часть мы тоже разделим на две половинки, и после третьего вопроса узнаем, в какой из них лежит загаданное число. Останется два варианта:

$$1\ 2 \mid 3\ 4 \mid 5\ 6 \mid 7\ 8 \mid 9\ 10 \mid 11\ 12 \mid 13\ 14 \mid 15\ 16$$

Задаем последний, четвёртый вопрос и узнаем какое именно число загадал ведущий.

$$1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \mid 10 \mid 11 \mid 12 \mid 13 \mid 14 \mid 15 \mid 16$$

Итак, мы показали, что четырех вопросов достаточно, чтоб угадать загаданное число из 16 возможных.

Определение 8.1 *Обозначим* $\mathrm{ilog}(N)$ *минимальное число вопросов, которые нужно задать, чтобы наверняка узнать загаданное число из* N *возможных вариантов.*

Значит, мы показали, что $\mathrm{ilog}(16) = 4$. Чтобы угадать из двух вариантов, нужен один вопрос, то есть $\mathrm{ilog}(2) = 1$. Далее $\mathrm{ilog}(3) = 1$, $\mathrm{ilog}(4) = 2$, $\mathrm{ilog}(8) = 3$. Докажите это. Функция $\mathrm{ilog}(n)$ есть **логарифм n по основанию 2 округленный до большего натурального**. Логарифм по основанию 2 обозначается $\log_2 n$ или $\log n$, — это функция обратная возведению 2 в какую-то степень.

$$\begin{aligned} &2^4 = 16, \Rightarrow \mathrm{ilog}\,16 = \log 16 = 4\\ &2^5 = 32, \Rightarrow \mathrm{ilog}\,32 = \log 32 = 5\\ &\log 20 = 4.32193,\ \mathrm{ilog}\,20 = 5 \end{aligned}$$

$\mathrm{ilog}\,n$ есть число вопросов, и поэтому натуральное число. Функция $\log n$ — гладкая функция и может принимать любые значения. Она совпадающая с функцией $\mathrm{ilog}\,n$ лишь при $n = 2, 4, 16, 32, \ldots$.

Задача 8.3 Нарисуйте таблицу

n	1	2	3	4	...	32
$\mathrm{ilog}\,n$						

Задача 8.4 Вычислите $\log 256$. Оцените $\log 100$.

Основные определения и соотношения

Определение 8.2 *Число a в степени n — это число, равное произведению n штук a:*

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots a.$$

Например:

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}.$$

Посмотрите на преобразования:

$$2^6 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{6+4} = 2^{10}.$$

Этот пример показывает, что при произведение двух степеней числа a их степени складываются:

$$\boxed{a^n \cdot a^m = (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) = a^{n+m}.} \qquad (8.1)$$

Если мы берем $2^5 = 32$ конфеты и делим их на двух людей, то каждому достается $16 = 2^4$ конфет. То есть

$$\frac{a^n}{a} = a^{n-1}.$$

Верна такая общая формула

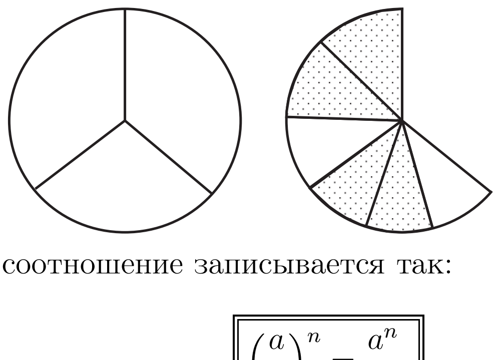
$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.} \qquad (8.2)$$

Удобно пользоваться отрицательными степенями: умножить на 2^{-1} все равно что разделить на 2.

Определение 8.3 *Число a в степени $-n$, по определению положим равным $1/a^n$:*

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \ldots a} = \frac{1}{a^n}.} \qquad (8.3)$$

Следующее важное соотношение касается возведения в степень рациональных чисел. Как мы знаем, умножить на 2/3 означает разделить на три части то что есть, и взять 2 кусочка. Если мы два раза умножим на 2/3, то нужно сначала взять две третьих пирога, склеить их воедино, снова разделить на две части и потом взять две их них. Это можно сделать так. Взять две третьих от каждой части и сложить их вместе. Всего получится 4 частей равных одной 9-ой, то есть



$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$$

В общем виде это соотношение записывается так:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.} \qquad (8.4)$$

И последнее соотношение это степень в степени. Что такое 3^7 — это семь перемноженных троек. А что такое $(3^7)^3$ — это 3^7 перемноженное три раза, то есть три раза по семь троек, что дает 21 тройку: $(3^7)^3 = 3^{21}$. В общем виде:

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n\cdot m}} \tag{8.5}$$

Задача 8.5. При каких $a > 0$ и n число a^n больше 1?
Решение. Ясно, что если $a = 1$, то и при положительных и при отрицательных n получается $1^n = 1$. Если $a > 1$, например $a = 2$, и $n > 0$, то $a^n > 0$, так как мы несколько раз число > 1 умножили на самого себя. Еще случай $0 < a < 1$. Например $a = 1/2$ и $n = 1/2$ получается половина от половины от половины, то есть одна восьмая, что меньше единицы И вообще число a^n $0 < a < 1$ при положительных n будет меньше единицы. При маленьких a и отрицательных n ситуация обратная. Пользуясь отношением 8.3 можно "перевернуть" a изменив степень на положительную. Например

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-10} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}.$$

А значит при $0 < a < 1$ и $n < 0$ ситуация такая же, что и при $a > 1$ и $n > 0$: $a^n > 1$.
Ответ:

$$\begin{array}{l} a > 1,\ n > 0,\ \Rightarrow\ a^n > 1; \\ a > 1,\ n < 0,\ \Rightarrow\ a^n < 1; \\ 0 < a < 1,\ n > 0,\ \Rightarrow\ a^n < 1; \\ 0 < a < 1,\ n < 0,\ \Rightarrow\ a^n > 1; \\ a = 1,\ \Rightarrow\ a^n = 1; \\ n = 0,\ \Rightarrow\ a^n = 1; \end{array}$$

Последний случай особый, его нужно просто раз и навсегда запомнить.

Ключевые задачи

Задача 8.6. Чему равно $3^{10} \cdot 9^2 \cdot 27$?
Решение. $9 = 3^2$, а $27 = 3^3$, поэтому

$$3^{10} \cdot 9^2 \cdot 27 = 3^{10} \cdot (3^2)^3 \cdot 3^3 = 3^{10} \cdot 3^6 \cdot 3^3 = 3^{10+6+3} = 3^{19}.$$

Задача 8.7. Что больше 5^{10} или 2^{20}?
Решение. $5^{10} > 2^{20}$, так как $2^{20} = (2^2)^{10} = 4^{10}$, $5^{10} > 4^{10}$. ■

Задача 8.8. Упростите это чудовище $\dfrac{(-6)^2 \cdot 2^{-7} \cdot 3^2}{2^{-2} \cdot 3^4}$.
Решение.

$$\frac{(-6)^2 \cdot 2^{-7} \cdot 3^2}{2^{-2} \cdot 3^4} = 6^2 \cdot 2^{-7} \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 3^{-4} =$$

$$= (2 \cdot 3)^2 \cdot 2^{-7} \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 3^{-4} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^{-7} \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 3^{-4} =$$

$$= 2^{2-7+2} \cdot 3^{2+2-4} = 2^{-3} \cdot 3^0 = \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}.$$

■

Задача 8.9. Вася загадал одно из первых 35 натуральных чисел. Сколько вопросов потребуется задать, чтобы наверняка узнать загаданное число?
Решение. Число 35 лежит между $2^5 = 32$ и $2^6 = 64$, поэтому 5 вопросов еще не хватить, а 6 будет достаточно.

Задача 8.10. Больше или меньше единицы число $0.009\frac{10^4 \cdot 0.01}{3^2 \cdot 1000}$?

Задачи для решения в классе

Задача 8.11 Поставьте правильный знак неравенства 3^5 ? 2^{10}.

Задача 8.12 Посмотрите на табличку приставок для образования кратных и дольных единиц

тера	$1000000000000 = 10^{12}$	трилион
гига	$1000000000 = 10^9$	миллиард
мега	$1000000 = 10^6$	миллион
кило	$1000 = 10^3$	тысяча
дека	$100 = 10^2$	сто
деци	$0.1 = 10^{-1}$	одна десятая
санти	$0.01 = 10^{-2}$	одна сотая
мили	$0.001 = 10^{-3}$	одна тысячная
микро	$0.000001 = 10^{-6}$	одна миллионная
нано	$0.000000001 = 10^{-9}$	одна миллиардная
пико	$0.000000000001 = 10^{-12}$	одна триллионная

Сколько сантиметров в мегаметре? Сколько кубических дециметров в кубическом метре?

Задача 8.13 Найдите число $n = 2^{2^{2^2}}$. Сколько в нем знаков?

Задача 8.14 Поставьте на плоскости с декартовой системой координат точки $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$, $3, 8$. Попробуйте соединить их гладкой линией. Эта кривая называется графиком функции 2^x.

Задача 8.15 Упростите а) $\frac{4^n}{2^n 2^n}$. б) $\frac{10^n}{2^{n-1}5^{n-1}}$.

Домашнее задание

$\boxed{\textbf{I}}$

Задача 8.16. Сравните с единицей а) $9^4 \cdot 3^{-6}$, б) $(2^4)^{-1}$, в) $(3^4)/(3^{-4})$.

Задача 8.17 Поставьте правильный знак неравенства 3^5 ? 2^{10}.

Задача 8.18 Раскройте скобки $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)$.

Задача 8.19 Упростите $a \cdot a \cdot a \cdot a \frac{b^2}{\left(((ab)^2)^3\right)^4}$.

Задача 8.20 Верно ли что $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^5 > 1$?

Задача 8.21 Представьте числа 1/25, 1/5, 1, 5, 25, 125 в виде степеней пятёрки.

Задача 8.22 Диаметр молекулы кислорода примерно 0.3 нм (нанометра). Во сколько раз диаметр футбольного мяча (29 см) больше диаметра молекулы кислорода?

Задача 8.23 Решите уравнение $4 \cdot 2^x = 4^x$.

II

Задача 8.24 Поставьте правильный знак неравенства $2^4 3^4$? $6 \cdot 2^9$.

Задача 8.25 Масса Земли равна $M = 6000000000000000000000$ кг, а масса атома водорода $m = 0.0000000000000000000000017$ г. Запишите в стандартном виде и найдите их отношение этих масс.

Задача 8.26 Сколько нулей после запятой в числе $1/2^20$?

Задача 8.27 Решите уравнение $4 \cdot (2^{2x})^x = 16^x$.

III

Задача 8.28 Раскройте скобки $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})$.

Задача 8.29 $1/2 = 0.5$, $1/4 = 0.25$, $1/8 = 0.125$, $1/16 = 0.0625$ Сколько нулей идет после запятой до первой ненулевой цифры в десятичной записи числа $1/2^20$? Сколько всего цифр в десятичной записи?

Задача 8.30 Найдите рациональное число $x = 0.11111111\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3}\frac{1}{10^4} + \ldots$, то есть представьте в виде дроби m/n.

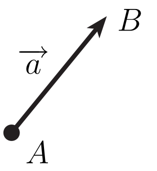
Семинар 9

Геометрия ВЕКТОРА

План занятия

- Что такое вектор?
- Сложение векторов
- Умножение векторов на число
- Площадь треугольника
- Разложение вектора по базису

Что такое вектор?



Вектор — это направленный отрезок, то есть отрезок один конец которого является началом, а второй — концом. На рисунка вектора обозначают стрелками.

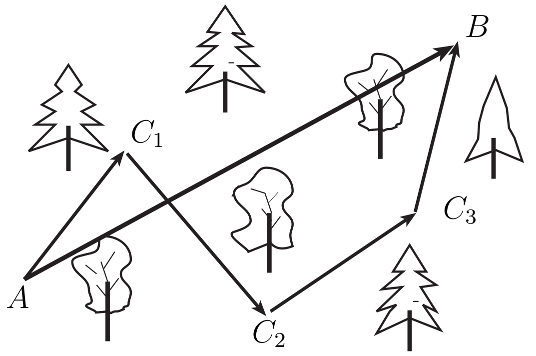
Длина вектора или модуль вектора есть длина отрезка.

На рисунке показан вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$. Его начало — точка A, а конец — точка B. Модуль вектора $\overrightarrow{a}$ обозначается как

$$|\overrightarrow{a}| = \text{ длина отрезка } AB.$$

Простейший пример вектора — это вектор перемещения. Начало вектора — это точка, где был объект, а конец вектора — точка, куда этот объект переместился.

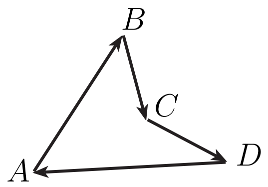
Сложение векторов

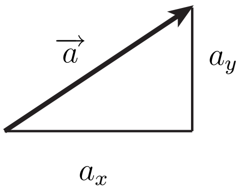


Вектора можно складывать. Посмотрите на карту леса с начерченным на ней маршрутом. Этот маршрут складывался из отдельных прямых кусочков — небольших векторов. В результате этих малых перемещений группа туристов осуществила перемещение $\overrightarrow{AB}$. Это значит, что

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_5B}.$$

Вектор конечного перемещения есть сумма векторов отдельных перемещений.



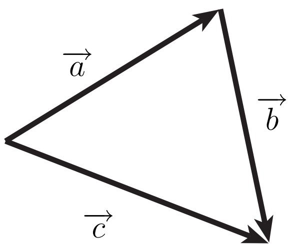


Среди чисел есть число равное нулю. Среди векторов тоже есть нулевой вектор. Его обозначают как $\overrightarrow{0}$ или $\mathbf{0}$. Он соответствует нулевому перемещению. Например, сумма векторов $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{0}$ дает нулевой вектор, потому что в результате этих перемещений мы вернулись в прежнюю точку.

Вектору на плоскости естественно сопоставить два числа. А именно, каждый вектор можно понимать как инструкцию на сколько надо сдвинуться впрво/влево и на сколько надо сдвинуться вниз/вверх. Вектор $\overrightarrow{a}(a_x, a_y)$ обозначает, что надо сдвинуться вправо на a_x и вверх на a_y. Если a_x отрицательно, то значит нужно двигаться влево, если a_y отрицательно, то двигаться нужно вниз. Посмотрите примеры. Эти два числа называются координатами вектора. По координатам вектора легко вычислить его длину, нужно лишь применить теорему Пифагора:

$$|\overrightarrow{a}(a_x, a_y)| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{9.1}$$

Задача 9.1. Найдите координаты вектора перемещения из точки B в точку C.



Посмотрите на рисунок. Вектор $\overrightarrow{c}$ является суммой векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}.$$

Если у этих векторов заданы координаты

$$\overrightarrow{c}(c_x, c_y), \quad \overrightarrow{a}(a_x, a_y), \quad \overrightarrow{b}(b_x, b_y),$$

то необходимо, чтобы выполнялось равенство:

$$c_x = a_x + b_x$$
$$c_y = a_y + b_y$$

Этот факт можно записать в такой форме

$$\overrightarrow{c}(c_x, c_y) = \overrightarrow{a}(a_x, a_y) + \overrightarrow{b}(b_x, b_y).$$

Такое правило сложения легко объяснить. Сумма двух векторов — это последовательное применение инструкций по перемещению. Можно сначала выполнить все инструкции по перемещению в горизонтальном направлении, а потом все инструкции по перемещению в вертикальном направлении. Поэтому когда мы складываем вектора мы просто складываем все первые координаты и все вторые координаты. Полученные два числа есть координаты вектора суммы векторов.

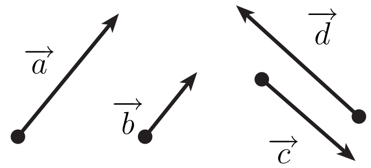
Если $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, то естественно положить, что

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}.$$

То есть вектора можно не только складывать, но и вычитать. Вычесть из вектора $\overrightarrow{c}$ вектор $\overrightarrow{b}$ значит прибавить к вектору $\overrightarrow{c}$ вектор $-\overrightarrow{b}$. Если перед вектором стоит минус, то его начало и конец меняются местами.

Коллинеарные вектора

Вектора называются **коллинеарными**, если их отрезки параллельны. Коллинеарность то же самое что и параллельность. Но в отличие от отрезков, у векторов есть еще и направление. Поэтому два коллинеарных вектора могут быть либо сонаправленными, либо противоположно направленными.



На рисунке вектор $\overrightarrow{a}$ сонаправлен с вектором $\overrightarrow{b}$, а вектора $\overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{d}$ противоположно направленные. Вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{c}$ не являются коллинеарными, а значит, они не противоположно направленные и не соноправленные.

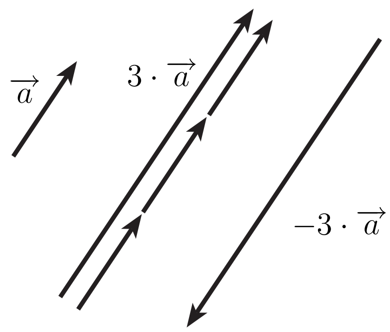
Умножение вектора на число

Вектора можно не только складывать и вычитать друг из друга, но и умножать на число. Например, $5 \cdot \overrightarrow{a}$ — это пять векторов $\overrightarrow{a}$ сложенных друг с другом.

$$n \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} + \ldots + \overrightarrow{a}.$$

Число n может быть отрицательным, это значит что нужно откладывать вектора в противоположную сторону.

Можно умножать не только на целые числа, но и любые действительные.



Определение 9.1 *Вектор $\overrightarrow{a}$ умноженный на число k есть вектор $\overrightarrow{a}$ коллинеарный $\overrightarrow{a}$. Его длина есть длина вектора $\overrightarrow{a}$, умноженная на модуль числа k. Он сонаправлен с $\overrightarrow{a}$, если $k > 0$, и противоположно направлен, если $k < 0$:*

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{b} = k \cdot \overrightarrow{a},\\
&|\overrightarrow{b}| = |k| \cdot |\overrightarrow{a}|,\\
&k > 0, \Rightarrow \overrightarrow{a} \upuparrows \overrightarrow{b},\\
&k < 0, \Rightarrow \overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b},
\end{aligned}$$

Что происходит с координатами вектора при умножении на число? Ответ прост — координаты вектора умножаются на это число:

$$\overrightarrow{a}(a_x, a_y), \quad \overrightarrow{b} = k \cdot \overrightarrow{a}, \quad \Rightarrow \overrightarrow{b}(k \cdot a_x, k \cdot a_y).$$

Итак, мы узнали что такое вектора, какие они бывают и что с ними можно делать. Давайте рассмотрим две конкретные задачи, где применяются вектора.

Площадь треугольника

Два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Если их отложить от одной точки, образуют две стороны треугольника. Третья сторона получится, если соединить концы векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Таким образом, два вектора однозначно задают треугольник.

Задача 9.2. Как найти площадь треугольника, если известны координаты векторов

$$\overrightarrow{a}(a_x, a_y),$$
$$\overrightarrow{b}(b_x, b_y),$$

которые его задают.
Решение. Вспомним формулу для площади треугольника

$$S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C \tag{9.2}$$

Площадь равна половине произведения длин сторон на синус угла между ними. Оказывается, зная координаты векторов, которые представляют из себя стороны a и b, можно запросто вычислить

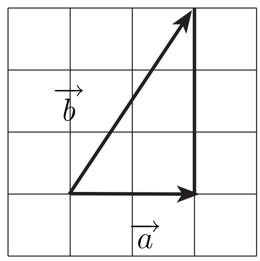
$$a \cdot b \cdot \sin C = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin C = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x. \tag{9.3}$$

Это замечательная формула позволяет быстро вычислить синус угла между векторами без каких-либо геометрических построений и рассуждений. Доказывать эту формулу мы не будем. Только посмотрим как она работает на практике. Подставляя $a \cdot b \cdot \sin C$ в формулу площади треугольника 9.2 находим нужную нам формулу, которую мы советуем вам запомнить:

$$S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot |a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x| \tag{9.4}$$

Как видите, нужно найти два перекрёстных произведения координат, вычесть одно из другого и разделить на два. Модуль результата и будет площадью треугольника.

Вот простой пример. Два вектора:



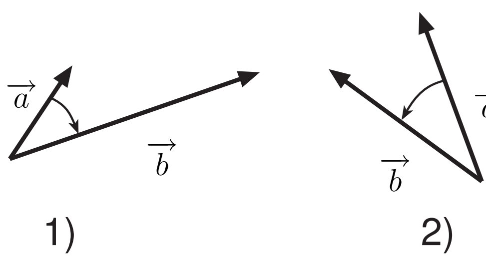
$$\overrightarrow{a}(2, 0),$$
$$\overrightarrow{b}(2, 3),$$

Площадь треугольника, который они задают равна по формуле

$$S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot |2 \cdot 3 - 0 \cdot 1| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

Это верно, площадь этого треугольника равна половинке прямоугольника 3×2, и действительно равна 3.

Важный момент. Рассмотрим выражение



$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$$

Это выражение для векторов

$$\overrightarrow{a}(a_x, a_y),$$
$$\overrightarrow{b}(b_x, b_y),$$

может быть как положительным, так и отрицательным. Отчего это зависит? Это зависит от порядка векторов. Если мы их переставим местами, то и выражение $[,]$ поменяет знак:

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = -[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}].$$

Как для данных двух векторов определить, какое из двух выражений $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$ и $[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}]$ положительно, а какое отрицательно? Ответ такой. Давайте будем двигаться от вектора $\overrightarrow{a}$ к вектору $\overrightarrow{b}$ по кратчайшей дуге. Если движение будет происходить против часовой стрелки, то $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$ положительно, если же по часовой — отрицательно. Посмотрите на рисунок — в первом случае $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$ положительно и синус между углами положителен, во втором случае отрицателен.

Разложение вектора по базису

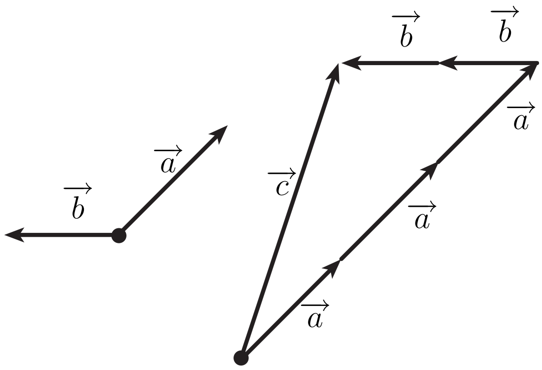
Есть такая задача

Задача 9.3. Разрешено двигаться только на северо-восток и строго на запад. Сколько мы должны двигаться в направлении северо-востока а потом в направлении запада, чтобы осуществить заданное перемещение – север +3 км и восток +1 км?

На язык математики эту задачу можно перевести так.

Задача 9.4. Есть два вектора $\overrightarrow{a}(1,1)$ и $\overrightarrow{b}(-1,0)$. Найдите сколько раз мы должны переместиться на вектор $\overrightarrow{a}$ и сколько раз на вектор $\overrightarrow{b}$ чтобы конечный вектор перемещения был $\overrightarrow{c}(1,3)$. Другими словами:

$$x \cdot \overrightarrow{a}(1,1) + y \cdot \overrightarrow{b}(-1,0) = \overrightarrow{c}(1,3).$$



Найдите неизвестные x и y.

Решение. Например так: с помощью вектора $\overrightarrow{b}$ можно перемещаться только в направлении оси x. Значит, все перемещение в направлении оси y должно набираться с помощью вектора $\overrightarrow{a}$. Это значит, что нужно его взять 3 раз.

$$3 \cdot \overrightarrow{a}(1,1) = (3,3).$$

Теперь нужно добавить нужное количество вектора $\overrightarrow{b}(-1,0)$. Прибавление этого вектора уменьшает первую координату на 1, значит нужно его прибавить два раза, чтобы получить первую координату 1:

$$3 \cdot \overrightarrow{a}(1,1) + 2\overrightarrow{b}(-1,0) = (1,3).$$

Решение. (Второй способ). Последнюю строчку можно разбить на два уравнения:

$$\begin{cases} x \cdot 1 + y \cdot (-1) = 1 \\ x \cdot 1 + y \cdot 0 = 3 \end{cases}$$

Решаем эти уравнения: $x = 3$, $3 - y = 1$, $y = 2$. Получили ответ. Ответ: $x = 3$, $y = 2$.

Ключевые задачи

Задача 9.5. Пусть вектор $\overrightarrow{a}$ задает перемещение из точки $A(1,2)$ в точку $B(4,5)$. В какую точку мы попадем, если осуществим это перемещение из точки $C(4,5)$.

Решение. Давайте найдем координаты вектора $\overrightarrow{a}$. Вправо, вдоль оси x мы сместились на $4-1=3$, а вверх, вдоль оси y на $5-2=3$. Таким образом, вектор перемещения есть $\overrightarrow{a}(3,3)$. Если мы этот вектор отложим от точки $C(4,5)$ то попадем в точку $D(4+3,5+3)=D(7,8)$. Ответ: Мы попадем в точку с координатами $D(7,8)$. ■

Задача 9.6. Даны два вектора $\overrightarrow{a}(1,2)$ и $\overrightarrow{b}(-4,7)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$.
Решение. Сложим координаты поэлементно:

$$\overrightarrow{a}(1,2)+\overrightarrow{b}(-4,7)=\overrightarrow{c}(1-4,2+7)=\overrightarrow{c}(-3,9).$$

■

Задача 9.7. Разложите вектор $c(2,-3)$ по векторам $\overrightarrow{a}(1,-2)$, $\overrightarrow{b}(2,1)$. Нарисуйте это разложение на клеточной бумаге.

Задача 9.8. Даны координаты вершин треугольника $\triangle ABC$: $C(1,1)$, $A(2,3)$, $B(7,5)$. Найдите его площадь.
Решение. Выберем какую-нибудь вершину. Пусть это будет вершина C. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{CB}$.

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}(2-1,3-1)=\overrightarrow{CA}(1,2),$$

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}(7-1,5-1)=\overrightarrow{CA}(6,4),$$

Пользуясь формулой 9.4 получаем

$$S_\triangle=\frac{1}{2}\cdot|1\cdot4-2\cdot6|=\frac{1}{2}\cdot|-8|=4.$$

Ответ: $S_\triangle=4$.

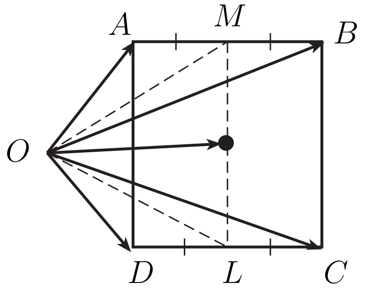
Задача 9.9. Пусть $ABCD$ — квадрат, O — некоторая точка, а вектор $\overrightarrow{m}$ равен среднему арифметическому векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$:

$$\overrightarrow{m}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}.$$

Куда будет указывать вектор m, если отложить его от точки O?

Ответ: Этот вектор будет указывать на середину квадрата.

Решение. Действительно, представим вектор $\overrightarrow{m}$ как

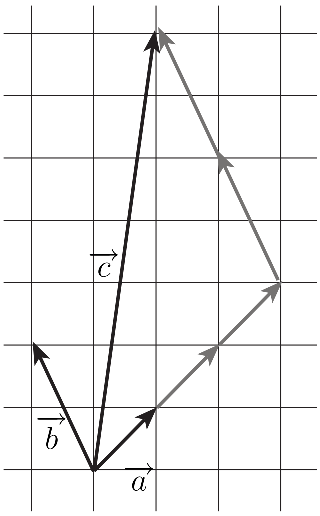


$$\overrightarrow{m}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}+\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}\right).$$

Вектор $\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$ указывает на середину отрезка AB — точку M. Вектор $\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}$ указывает на середину отрезка CD — точку L. То есть

$$\overrightarrow{m}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OL}}{2}.$$

Поэтому вектор $\overrightarrow{m}$ указывает на середину отрезка ML, то есть на середину квадрата.



Задача 9.10. Есть два вектора $\overrightarrow{a}(1,1)$ и $\overrightarrow{b}(-1,2)$. Разложите вектор $\overrightarrow{c}(1,7)$ по векторам $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Решение. Нам нужно найти неизвестные x и y:

$$x \cdot \overrightarrow{a}(1,1) + y \cdot \overrightarrow{b}(-1,2) = \overrightarrow{c}(1,7),$$

что дает два уравнения:

$$\begin{cases} x \cdot 1 + y \cdot (-1) = 1 \\ x \cdot 1 + y \cdot 2 = 7 \end{cases}$$

Решаем эти уравнения: Из первого уравнения получаем $x = y + 1$. Подставляем этот x во второе уравнение: $y + 1 + 2y = 7$, что дает $3y = 6$ и $y = 2$. Далее находим x: $x = y + 1 = 2 + 1 = 3$.

Получили Ответ: $x = 3$, $y = 2$.

$$3 \cdot \overrightarrow{a}(1,1) + 2 \cdot \overrightarrow{b}(-1,2) = \overrightarrow{c}(1,7).$$

Задачи для решения в классе

I

Задача 9.11. Найдите длину векторов $\overrightarrow{a}(1,-4)$, $2 \cdot \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}(-2,3)$, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

Задача 9.12. Нарисуйте два вектора $\overrightarrow{a}(1,2)$ и $\overrightarrow{b}(2,-1)$. Найдите $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$. Найдите площадь треугольника, построенного на этих векторах. Найдите синус угла между этими векторами.

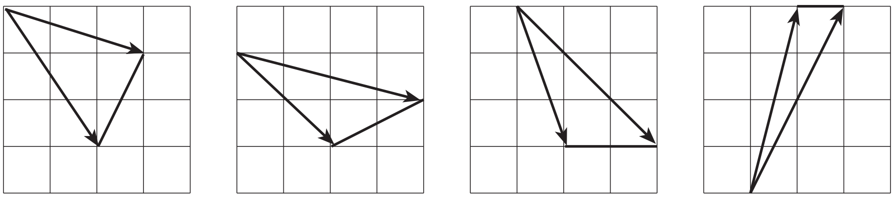


Рис. 9.1.

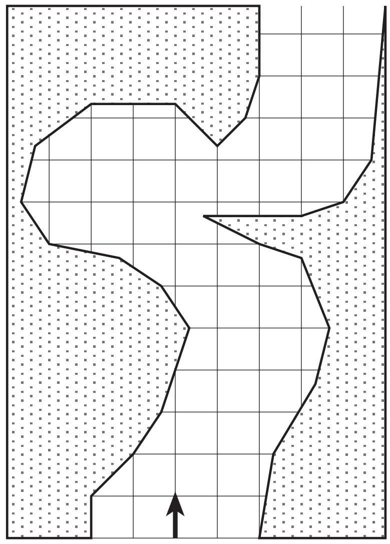
Задача 9.13. $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны.

Задача 9.14. $ABCD$ — параллелограмм. Представьте вектора $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AO}$ через вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Задача 9.15. Найдите площадь треугольников на рисунке 9.1.

Задача 9.16. Разложите вектор $\overrightarrow{c}(2,6)$ по векторам $\overrightarrow{a}(2,5)$ и $\overrightarrow{b}(-1,-2)$ Найдите вектор $\overrightarrow{d} = 3 \cdot \overrightarrow{c} - 2 \cdot \overrightarrow{a}$. Разложите его по векторам $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Задача 9.17. Есть такая игра — «Ралли». Несколько машин едут по дороге нарисованной на листке в клеточку. Один ход игрока — перемещение на некоторый вектор. Следующим ходом игрок ходит таким же вектором, что и предыдущий ход или же у него есть возможность чуть-чуть увеличить или уменьшить вектор перемещения, а также чуть чуть отклониться в сторону. На поворотах надо тормозить, чтобы не врезаться в границу дороги. На прямолинейных участках имеет смысл ускорятся. Задача игры — первым прийти к финишу. Ваша задача — научится играть в эту игру. Поясним точнее каким может быть следующий ход. Если предыдущим ходом вы переместились на вектор $\overrightarrow{a}_n$, то следующим ходом вы можете осуществить перемещение



$$\overrightarrow{a}_{n+1} = \overrightarrow{a}_n + \overrightarrow{c},$$

где вектор $\overrightarrow{c}$ любой из следующих векторов:

$$(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (0,-1),\ (-1,0),\ (1,1),\ (1,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1).$$

Задача 9.18. При каком x вектор $\overrightarrow{b}(x,6)$ коллинеарен $\overrightarrow{b}(3,2)$?

Задача 9.19. При каком x вектор $\overrightarrow{b}(x,-2)$ коллинеарен $\overrightarrow{b}(-3,3)$?

Задача 9.20. Дан треугольник ABC, B_1 и C_2 — середины сторон AB и AC. Разложите вектор $\overrightarrow{B_1C_1}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Разложите вектор $\overrightarrow{BC}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Докажите, что $\overrightarrow{B_1C_1}$ сонаправлен с $\overrightarrow{BC}$ и в два раза его короче.

II

Задача 9.21. При каком x вектор $\overrightarrow{b}(x,2)$ коллинеарен $\overrightarrow{b}(4,2-x)$?

Задача 9.22. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M есть точка пересечения его диагоналей. Точка N есть середина отрезка AM. Разложите вектор $\overrightarrow{AN}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Задача 9.23. Найдите длину векторов $\overrightarrow{a}(12,-5)$ и $200 \cdot \overrightarrow{a}$.

Задача 9.24. Дан треугольник ABC. Точка A_1 — середина стороны BC. Разложите вектор AA_1 через вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

III

Задача 9.25. Даны вектора $\overrightarrow{a}(1,-1)$ и $\rightarrow(2,1)$. Верно ли, что прибавляя и отнимая эти вектора мы можем добраться до любой точки (m,n) на плоскости (считайте, что мы находимся в точке $(0,0)$)?

Задача 9.26. Даны очки A, B и O. Точка M такая, что вектор $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$. И пусть $x + y = 1$. Выразите вектора $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$ через $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. На основе результата, докажите что точка M лежит на отрезке AB. В каком отношении она его делит.

Задача 9.27. Дан треугольник ABC. Точка A_1 — середина стороны BC. Точка B_1 — середина стороны AC.Точка C_1 — середина стороны AB. Точка M есть точка пересечения медиан. Разложите вектора $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Задача 9.28. Даны два различных не коллинеарных вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Коллинеарны ли вектора а) $2\cdot\overrightarrow{a}+6\cdot\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a}+3\cdot\overrightarrow{b}$, б) $3\cdot\overrightarrow{a}-2\cdot\overrightarrow{b}$ и $-3\cdot\overrightarrow{a}+2\cdot\overrightarrow{b}$, в) $3\cdot\overrightarrow{a}+4\cdot\overrightarrow{b}$ и $4\cdot\overrightarrow{a}+3\cdot\overrightarrow{b}$?

Домашнее задание

I

Задача 9.29. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{a}=100\cdot\overrightarrow{a}+100\cdot\overrightarrow{b}$, если $\overrightarrow{a}(1,0)$, $\overrightarrow{b}(1,-1)$.

Задача 9.30. Разложите вектор $\overrightarrow{c}(4,1)$ по векторам $\overrightarrow{a}(2,-1)$ и $\overrightarrow{b}(1,-1)$ Найдите вектор $\overrightarrow{d}=3\cdot\overrightarrow{c}+2\cdot\overrightarrow{a}$. Разложите его по векторам $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Задача 9.31. При каком x вектор $\overrightarrow{b}(x,2x-1)$ коллинеарен $\overrightarrow{b}(-3,-5)$?

Задача 9.32. Дано два вектора $\overrightarrow{a}(4,1)$ и $\overrightarrow{b}(2,5)$ Найдите вектор

$$\overrightarrow{d}=\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}$$

Отложите эти вектора от одной точки. Покажите, что их концы лежат на одной прямой.

II

Задача 9.33. Вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ заданы на рисунке 9.2. Найдите координаты этих векторов и вектора $\overrightarrow{d}=3\cdot\overrightarrow{a}-2\cdot\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$.

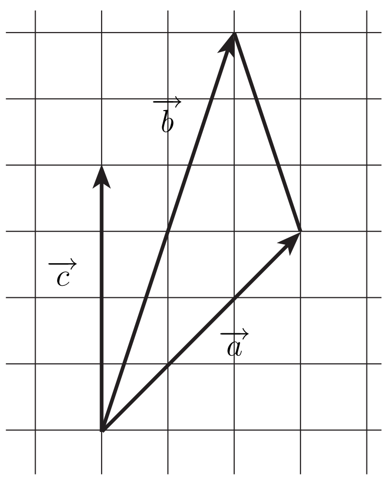


Рис. 9.2.

Задача 9.34. Найдите синусы острых углов между векторами на рисунке 9.1.

Задача 9.35. Дано два вектора $\overrightarrow{a}(4,1)$ и $\overrightarrow{b}(-2,7)$ Найдите вектор

$$\overrightarrow{d}=\frac{2\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{3}$$

Отложите эти вектора от одной точки.

Задача 9.36. Найдите площадь треугольника, заданного векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, а также синус угла между этими векторами на рисунке 9.2.

Задача 9.37. При каком x вектор $\overrightarrow{b}(x^2-2x,4)$ коллинеарен $\overrightarrow{b}(6,8)$?

Задача 9.38. Даны вектора $\overrightarrow{a}(1,3)$ и $\overrightarrow{b}(3,1)$. Найдите вектор $\overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})/2$. Нарисуйте эти три вектора, отложив их от одной точки. Разложите вектор $\overrightarrow{d} = 2 \cdot \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$ по векторам $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Задача 9.39. За один шаг мы можем перемещаться на один из четырех векторов:

$$\overrightarrow{c}_1(0,1),\ \overrightarrow{c}_2(0,1),\ \overrightarrow{c}_3(-1,0),\ \overrightarrow{c}_4(0,-1).$$

Нарисуйте множество точек на плоскости, до которых мы можем добраться за пять или меньшее количество шагов (начальная точка $(0,0)$).

III

Задача 9.40. Обозначьте какими нибудь буквами вектора на рисунках 9.2(2) и 9.2(3). Найдите их координаты. Разложите первые два вектора по двум другим, а затем наоборот — каждай вектор на рисунке 9.2(3) разложите по векторам на рисунке 9.2(2).

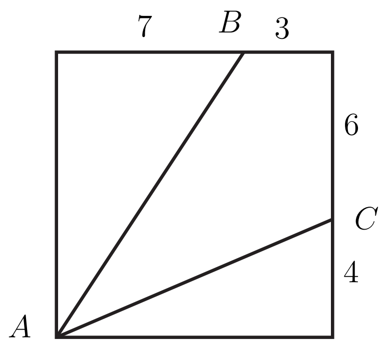


Рис. 9.3.

Задача 9.41. Пользуясь данными на рисунке 9.3 найдите синус угла $\angle BAC$

Задача 9.42. Дано два вектора $\overrightarrow{a}(4,1)$ и $\overrightarrow{b}(-2,7)$ Найдите вектор

$$\overrightarrow{d} = \frac{2 \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{3}$$

Отложите эти вектора от одной точки. Покажите что их концы A, B, D лежат на одной прямой. В каком отношении делит точка D отрезок AB?

Задача 9.43. Вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ заданы на рисунке 9.2. Найдите разложение вектора $\overrightarrow{c}$ по векторам $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Задача 9.44. За один шаг мы можем перемещаться на один из n трёх векторов:

$$\overrightarrow{c}_1(1,0),\ \overrightarrow{c}_2(-1/2, \sqrt{3}/2),\ \overrightarrow{c}_3(-1/2, -\sqrt{3}/2),$$

Нарисуйте множество точек на плоскости, до которых мы можем добраться за пять или меньшее количество шагов (начальная точка $(0,0)$).

ОТВЕТЫ

1.Алгебра
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

2.Геометрия
ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

2.11: $c = 6$, $b = \sqrt{20}$. **2.13:** $\sqrt{4^2+7^2} = \sqrt{65}$. **2.15:** $h = \sqrt{28} = 4\sqrt{7}$. **2.16:** 5. **2.17:** $1/\sqrt{2}$. **2.19:** Решите систему $x+y = 12$, $8^2 - x^2 = 10^2 - y^2$. Ответом будет $2\sqrt{5^2-x^2}$. **2.22:** $30°$, 3, $3\sqrt{3}$. **2.24:** $\sqrt{72}$. **2.26:** $b = 6$, $a = 6/\sqrt{3}$, $c = 4\sqrt{3}$. **2.27:** Пусть x длина кусочка гипотенузы под катетом длины 6. Тогда $9x = 6^2$, $x = 4$, $y = 9-4 = 5$. Ответ: 4/5. **2.35:** $b = 15/4$. **2.36:** $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, $\sin B/2 = r/\sqrt{r^2+(CB-r)^2}$. **2.37:** Всего 8 пифагоровых троек с гипотенузой $\leqslant 25$: $4^2+3^2 = 5^2$, $8^2+6^2 = 10^2$, ... , $20^2+15^2 = 25^2$, $24^2+7^2 = 25^2$. **2.39:** Найдем площадь $S = P \cdot r/2 = 6$, значит $ab = 12$, $a+b+\sqrt{a^2+b^2} = 12$. Получаем квадратное уравнение и решаем его. **2.40:** 5, 8.

3.Геометрия
ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

3: 500. **3.23:** $|c| \leqslant \sqrt{2}$. **3.26:** $(-1,0)$. **3:** 3/2. **3.35:** $(0,4)$. **3:** $-3/2$. **3.40:** $x = 1$, $y = -2$. **3.47:** $A(0,0)$,$B(1,0)$, $C(1/2,\sqrt{3}/2)$. **3.49:** Это уравнение равносильно $x = 1$. Ответ есть прямая параллельная оси OY, проходящая через точку $(1,0)$. **3:** 4

4.Алгебра
КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4: $x \in \{2,4\}$. **4:** $x \in \{3,6\}$. **4:** $x = 5$. **4.13:** 1/2, 1. **4:** 6 и 4. **4.17:** Корней нет. **4:** 0 и 1. **4.19:** $x = 4$. **4.20:** $2x^2 - 3x - 1$. **4:** 1, -2, 2. **4.23:** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. **4.24:** $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. **4.26:** x^2+6x+4. **4.30:** $\{0,\varphi,-1/\varphi\}$. **4.37:** $t = 1000$ секунд = 16 минут 40 секунд. **4.38:** Да, существует. Решите уравнение $x(x+1) = 3(x-1)^2$, и получите, что $x \in 3, 1/2$. **4.40:** φ, $-1/\varphi$, где $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **4:** а) -2, б) 3. **4.45:** $\frac{5}{2}$. **4.46:** Раскройте скобки в $(x-2-\sqrt{3})\cdot(x-2+\sqrt{3})$ и получите ответ. **4:** 0. **4.49:** $(x^2-5)^2 = 24$. **4.52:** x равен золотой пропорции $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. **4.53:** φ, $-1/\varphi$, где $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

5.Анализ
ГРАФИКИ

5: **а)** $y_1 = -6$, $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, **б)** $y_1 = 0$, $x_1 =$, **в)** $y_1 = 12$, $x_1 = 2$, $x_2 = -3$. **5:** $x_0 = 0$, $y_0 = 4 + 4 = 8$. **5.9:** $\dfrac{4}{8 \cdot 8} x(x - 16)$. **5:** -4.

6.Геометрия
ВГЛУБЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

6.6: $\dfrac{5}{4}(8 + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 3\sqrt{6})$. **6.12:** 2. **6.13:** $1/\sqrt{2}$. **6.14:** $h_c = 5$,$a = \sqrt{20}$, $b = \sqrt{20}$, $c = 4$. **6.15:** $R = 3/2$. **6.16:** $a = \sqrt{17}$, $b = 5$, $c = 4$, $h_c = 4$, $S = 8$, $r = S/p = 16/(9 + \sqrt{17})$. **6.21:** $S = 4\sqrt{6}$. $r = S/p = \sqrt{6}/2$. **6.23:** Такого треугольника не существует: $6 > 2 + 3$.

7.Геометрия
ДВИЖЕНИЕ — ЖИЗНЬ

7.9: У квадрата – 4, у окружности – бесконечное количество. **7.14:** $A'(-3, -4)$. **7.15:** $A'(-1, -4)$. **7.16:** $A'(-1, 4)$. **7.21:** $A'(-1, 2)$, $B'(-1, 3)$. **7.22:** $A'(2, 0)$, $B'(2, 3)$, $C(-1, 3)$, $D(0, -2)$. **7.26:** Отразите точку B относительно прямой l. Получите точку B'. Проведите отрезок AB' и найдите точку пересечения этого отрезка с прямой l. **7.29:** $A'(2, 8)$. **7.30:** $A'(2, -4)$. **7.35:** $C(5/3, 0)$. **7.38:** $A'(94, 104)$.

8.Алгебра
СТЕПЕНЬ ЧИСЛА

8.23: $x = 2$. **8.25:** $\frac{m}{M} = 2.833 \cdot 10^{-52}$. **8.26:** 6. **8.27:** $x = 1$. **8.29:** 6.

9.Геометрия
ВЕКТОРА